Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667-1754)

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ivo Schneider

München 1967

1968

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Gericke

2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 5. 68

Sonderdruck aus
Archive for History, Bd. 5, S. 177—317 (1968)
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York

Offprint from "Archive for History of Exact Sciences", Volume 5, Number 3/4, 1968, P. 177–317

Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York

Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667—1754)

IVO SCHNEIDER

Prof. Dr. KURT VOGEL zum 80. Geburtstag

Vorgelegt von J. E. HOFMANN

Summary

Before examining DE MOIVRE's contributions to the science of mathematics, this article reviews the source materials, consisting of the printed works and the correspondence of DE MOIVRE, and constructs his biography from them.

The analytical part examines DE MOIVRE's contributions and achievements in the study of equations, series, and the calculus of probability.

DE MOIVRE contributed to the continuing development from VIÈTE to ABEL and GALOIS of the theory of solving equations by means of constructing particular equations, the roots of which can be written in the form $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$. He also discovered the reciprocal equations. In the course of this work DE MOIVRE discovered an expression equivalent to $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ and, following COTES, he succeeded in expressing the n^{th} roots of unity in trigonometric form.

In the theory of series, DE MOIVRE developed a polynomial theorem encompassing NEWTON's binomial theorem and, in particular, a theorem of recurrent series useful in the calculus of probability.

The demands of the calculus of probability led DE MOIVRE to an approximation for the binomial coefficients $\binom{n}{m}$ for large values of n. The interaction between DE MOIVRE and JAMES STIRLING, particularly in regard to the asymptotic series for $\log(n!)$, is treated at length. This work supplied the foundation for DE MOIVRE's limit theorem for the binomial distribution.

The calculus of probability, which occupied him from 1708 onward, became in time ever more the center of DE MOIVRE's inquiries. Proceeding from contemporary collections of gambling exercises, DE MOIVRE, by introducing an explicit measure of probability for the so-called Laplace experiments, found the beginnings of a theory of probability. DE MOIVRE expanded the classic application of probability calculus to games of chance by addressing himself to the problem of annuities and by adopting HALLEY's work with its conception of "Probability of life". DE MOIVRE was the first to publish a mathematically formulated law for the decrements of life derived from mortality tables.

Inhalt

1. Kurze Übersicht der DE MOIVRE darstellenden Literatur 179
2. Quellen 180
2.1. Die Biographie von MATTHEW MATY 180
2.2. Das publizierte Werk 182
2.3. Briefe 185

2.3.1. Im Original noch vorhandene Briefe 186
2.3.2. Im 18. Jh. publizierte Briefe 189
2.3.3. Aus dem Gesamtmaterial erschlossene Briefe, die weder im Original noch in einem Abdruck vorhanden sind 191
3. Das Leben ABRAHAM DE MOIVRES 202
4. Die Lösung spezieller Gleichungen höheren als vierten Grades durch Radikale von VIÈTE bis DE MOIVRE 218
4.1. FRANÇOIS VIÈTE und PIERRE DE FERMAT 219
4.2. Die in der LEIBNIZhandschrift *De Bisectione Laterum* enthaltenen algebraischen Vorstellungen und Ergebnisse 224
4.3. DE MOIVRES unmittelbare Vorgänger 229
4.4. DE MOIVRES Arbeiten im Zusammenhang mit der Lösung spezieller Gleichungen höheren als vierten Grades 234
4.4.1. Der Beweis der MACHINschen Formel für $\operatorname{tg} n\alpha$ als Ausgangspunkt . . . 234
4.4.2. Winkelteilungs- und verwandte Gleichungen 237
4.4.3. Reziproke Gleichungen 247
4.5. Übersicht zu der in 4.1. bis 4.4. gegebenen Entwicklung 249
5. DE MOIVRE über Reihen 251
5.1. Das Polynomialtheorem 252
5.2. Rekurrente Reihen 258
5.3. DE MOIVRES und STIRLINGS Approximationen von Binomialkoeffizienten und $\log(n!)$ für sehr große n 266
6. DE MOIVRES Beiträge zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung . 276
6.1. Das Problem der Spieldauer und die Entwicklung spezieller Methoden zu seiner Lösung 280
6.2. Der DE MOIVRESche Grenzwertsatz für binomiale Verteilungen 292
6.3. DE MOIVRE und seine Vorgänger über Leibrenten 300
7. Schluß 303
Literatur 304
Chronologisches Verzeichnis des Briefwechsels DE MOIVRES 311
Namenregister 313

Abkürzungen

Neben den gebräuchlichen Abkürzungen (siehe Duden Rechtschreibung) wurden die folgenden verwendet:

a.a.O. = am angegebenen Ort = Verweis auf das nach Verfassern alphabetisch geordnete Literaturverzeichnis. Eine vor a.a.O. in runden Klammern angegebene Zahl kennzeichnet die entsprechende Nummer der im Literaturverzeichnis aufgeführten Arbeiten eines Autors.
AC = *Ars conjectandi* = JAKOB BERNOULLI (4) a.a.O.
AE = *Acta Eruditorum*
a.S. = alter Stil[47]
BM = *Bibliotheca Mathematica*
DMV = *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*
JL = *Journal Literaire*
MA = *Miscellanea Analytica*, London 1730
n.S. = neuer Stil[47]
PT = *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*
r.F. = rekurrente Folge
r.R. = rekurrente Reihe
SMA = *Miscellaneis Analyticis Supplementum*, London 1730
v. = veröffentlicht (nur im Briefverzeichnis verwendet)

1. Kurze Übersicht der de Moivre darstellenden Literatur

Den größten Anteil am publizierten Werk Moivres[1] hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diesem Schwerpunkt entsprechend verhält sich die Moivre darstellende Literatur.

Eine spezielle Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung (bis Laplace) hat Isaac Todhunter 1865 veröffentlicht[2]. Todhunter hat de Moivre als dem größten *Wahrscheinlichkeitstheoretiker* vor Laplace ein eigenes Kapitel gewidmet. Zu Ende des 19. Jahrhunderts haben J. Eggenberger[3] und Emanuel Czuber in verschiedenen Arbeiten[4] die Bedeutung de Moivres herausgestellt. In England hat dann insbesondere der Statistiker Karl Pearson in der von ihm gegründeten Zeitschrift *Biometrika*[5] viele Artikel über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik veröffentlicht, von denen sich zwei[6] speziell mit de Moivre beschäftigten. Zu dem Kreis von Karl Pearson bzw. seiner Schule gehören Helen M. Walker und F. N. David. Helen M. Walker ging in einem Buch über die Geschichte der Statistik[7] und in einem biographischen Aufsatz[8] auf Moivre ein. Florence Nightingale David schrieb nach einigen historischen Aufsätzen in den *Biometrika* ein Buch, das nach ihren eigenen Worten als eine Ergänzung zu Todhunter angesehen werden soll[9]. In diesem Buch ist ein größerer Abschnitt der Würdigung de Moivres eingeräumt. Einen wichtigen Beitrag lieferte Karl Wollenschlägers Edition des Briefwechsels Johann I Bernoullis mit Abraham de Moivre[10]. Wollenschläger hat jedoch für seine Edition nicht die Originale der Briefe Moivres an Johann I Bernoulli bzw. Briefentwürfe Johann I Bernoullis an Moivre, die in der Bibliothek der schwedischen Akademie der Wissenschaften in Stockholm liegen, sondern Abschriften benutzt.

Schließlich haben H. Freudenthal und H. G. Steiner in einem 1966 erschienenen Abriß *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik*[11] die entscheidende Bedeutung de Moivres für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 18. Jahrhundert herausgestellt.

Zur Literatur über Moivre außerhalb von Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik gehören ferner die Beiträge A. von Braunmühls in der *Biblio-*

[1] Abraham Moivre hat sich erst in England de Moivre genannt; siehe Abschnitt 3.

[2] Isaac Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability, from the Time of Pascal to that of Laplace*, London 1865.

[3] J. Eggenberger, *Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals*, Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, 1893, S. 110—182.

[4] Siehe vor allem E. Czuber, *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen*, Jahresbericht der D.M.V. 7, 1899.

[5] Biometrika 1, 1901/02.

[6] *Historical Note on the Origin of the Normal Curve of Errors*, Biometrika 16, 1924, S. 402—404 und *James Bernoulli's Theorem*, Biometrika 17, 1925, S. 201—210.

[7] Helen M. Walker, *Studies in the History of Statistical Method*, Baltimore 1929 und 1931.

[8] Helen M. Walker, *Abraham de Moivre*, Scripta Mathematica 2, 1934, S. 316—333.

[9] F. N. David, *Games, Gods and Gambling*, London 1962.

[10] Dissertation Heidelberg, 1933, veröffentlicht in den Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 1933, S. 151—317.

[11] In: *Grundzüge der Mathematik* IV, hrsg. v. H. Behnke, G. Bertram, R. Sauer, Göttingen 1966, S. 149—195.

theca Mathematica und in den *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*[12]. Eine kleine Arbeit MOIVRES über die Möndchen des HIPPOKRATES wird von H. WIELEITNER und J. E. HOFMANN[13] referiert. J. E. HOFMANN berücksichtigte auch in einem Aufsatz MOIVRES Leistung im Zusammenhang mit der Logarithmusfunktion[14].

2. Quellen

Der wissenschaftliche Nachlaß DE MOIVRES wurde von Freunden gesichert, ist aber bis heute verschollen. Man ist daher allein auf das publizierte Werk und die bis jetzt gefundenen Briefe angewiesen. Ebenfalls als Quelle kann mit Einschränkungen eine zeitgenössische Biographie angesehen werden.

2.1. Die Biographie von Matthew Maty

DE MOIVRE war am 27. Juni 1754 als Nachfolger von CHRISTIAN WOLF *Associé-Etranger* der Pariser Akademie geworden. Diese Mitgliedschaft sicherte ihm den traditionellen Nachruf des Sekretärs der Akademie. Dieses Amt hatte zu dieser Zeit GRANDJEAN DE FOUCHY inne. In der *Eloge* auf DE MOIVRE, die nach der Amsterdamer Ausgabe der Histoire de l'Académie des Sciences für 1754 als von DE FOUCHY verfaßt ausgewiesen wird[15], findet sich der Satz[16]:

> *mais il n'en eut pas le temps, la foiblesse et le besoin de dormir s'augmentèrent et pour me servir des termes de Mr. Maty, auquel je dois les Mémoires qui ont servi à cet Eloge, il cessa ...*

In einer Fußnote zu dem Artikel über MOIVRE in der von EUGÈNE und EMILE HAAG herausgegebenen *La France Protestante*[17] heißt es:

> *Grandjean de Fouchy, dans son Eloge inséré dans le Recueil de l'Académie des Sciences (1754), et redigé d'après les renseignements que lui avait fournis un de nos réfugies en Hollande, Mathy, auteur lui-même d'un Mémoire imprimé sur la vie de notre savant mathématicien.*

Tatsächlich hatte ein MATTHEW MATY bereits 1755 eine kurze Biographie MOIVRES veröffentlicht. Diese Biographie war in der September/Oktober-Nummer des von MATY gegründeten Journal Brittanique erschienen, also noch vor dem Druck der Pariser Akademieberichte für das Jahr 1754. MATY veranstaltete einen unveränderten Neudruck der Biographie im Jahre 1760[18,19]. Den ersten Teil des *Memoire* hatte DE MOIVRE selbst kurz vor seinem Tod MATY diktiert, was aus der folgenden Bemerkung MATYS nach dem ersten Abschnitt über die Jugend MOIVRES hervorgeht: *Ce n'est que jusqu'ici que s'étendent les mémoires que Mr. de Moivre*

[12] *Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes*, *BM* (3) 2, 1901, S. 97—102, und *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* II, Leipzig 1903.

[13] *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde*, München 1934.

[14] *Weiterbildung der logarithmischen Reihe Mercators in England III. Halley, Moivre, Cotes*, Deutsche Mathematik 5, 1940, S. 366f.

[15] Siehe Amsterdamer Ausgabe S. 259.

[16] Ebenda S. 270.

[17] VII, 1857, S. 433.

[18] MATY, *Mémoire sur la vie et sur les écrits de Mr. Abraham de Moivre*, La Haye 1760, S. 1—46.

[19] Siehe dazu auch AUGUSTUS DE MORGAN, *Dr. Johnson and Dr. Maty*, Notes and Queries (2) 4, 1857, S. 341.

m'a dictés quelques semaines avant sa mort. Manche Passagen der *Eloge* FOUCHYs stimmen fast wörtlich mit dem *Memoire* überein. Da alle späteren biographischen Aufsätze und Artikel über DE MOIVRE sich auf das *Memoire* bzw. die *Eloge* DE FOUCHYs stützen, ohne inhaltlich darüber hinauszugehen, ist aus dem Vorhergehenden klar, daß praktisch alle bisher benutzten biographischen Informationen auf MATTHEW MATY (französisch MATTHIEU MATHY) zurückgehen[20].

Dieser MATTHEW MATY ist 1718 als Sohn eines französischen Flüchtlings, des Theologen PAUL MATHY, in Utrecht geboren, hatte in den Niederlanden studiert und lebte seit 1740 in England. Er zählte zu den engsten Freunden des alternden DE MOIVRE. Er wurde Mitglied der Royal Society, später sogar deren Sekretär und brachte es zum Direktor der Bibliothek des 1753 gegründeten Britischen Museums[21].

Nach dem bisher Gesagten steht als Informationsgrundlage für eine Biographie DE MOIVREs allein das *Memoire* MATYs zur Verfügung, mit Ausnahme eines einzigen Zusatzes, den man in HAAGs *La France Protestante* über MOIVRE findet. Ich möchte daher kurz die Zuverlässigkeit des *Memoire* diskutieren.

Nach den Angaben MATYs hat MOIVRE selbst auf den ersten sieben Seiten seine Kindheit und seine Studienjahre bis zur Flucht nach England erzählt. MOIVRE diktierte seinem Biographen 87-jährig, den nahen Tod vor Augen. Es ist möglich, daß MOIVRE mit seiner Schilderung, wahrscheinlich sogar unbewußt, eine Auswahl aus den Fakten getroffen hat, die dem Zweck dienen sollte, eine spätere Entwicklung zu motivieren. So heißt es an einer Stelle, daß er als sechzehnjähriger *De Ratiociniis in Aleae Ludo* von HUYGENS gelesen habe, ohne mit einem Wort SCHOOTENs *Exercitationes Mathematicae*[22], in Anschluß an deren fünftes Buch HUYGENS Arbeit aufgenommen ist, zu erwähnen.

Über MATYs freundschaftliches Verhältnis zu DE MOIVRE habe ich schon berichtet; MATY betont auch diese Freundschaft, aus der ihm die Verpflichtung erwächst, über den Toten zu berichten; er fügt hinzu, daß MOIVRE von ihm einen wahrheitsgemäßen Bericht verlangt habe. Tatsächlich hat MATY die ihm zugänglichen Quellen sehr gründlich studiert und diese Quellen meist auch ausführlich zitiert. Viele seiner Angaben können heute noch überprüft werden. MATY konnte allerdings noch den Nachlaß MOIVREs einsehen. Leider macht er über den Inhalt der hinterlassenen Manuskripte keine Angabe, sei es, daß die wichtigsten Ergebnisse publiziert waren, sei es, daß er sich nicht für kompetent erachtete. Am Ende des *Memoire* findet sich der folgende Hinweis auf den Verbleib der DE MOIVRESchen Manuskripte: *Ses manuscripts sont entre les mains de quelques amis, aussi distingués par leurs connaissances que par leur zèle pour sa mémoire.* Irgendwelche Namen oder andere Hinweise fehlen.

Zusammenfassend kann man sagen: MATY hat — soweit man das noch überprüfen kann — eine wahrheitsgetreue Darstellung versucht und seine Freundschaft zu DE MOIVRE durch Weglassen negativer Fakten dokumentiert.

---

[20] Weder WOLLENSCHLÄGER noch HELEN M. WALKER haben die *Mémoire* MATYs benutzt und nahmen deshalb an, daß alle biographischen Informationen über MOIVRE auf DE FOUCHY zurückgehen.

[21] Zu den biographischen Informationen über MAT(H)Y siehe HAAG a.a.O. VII und *Dictionary of National Biography* XXXVII, London 1894.

[22] Leiden 1657.

2.2. Das publizierte Werk

Dazu einige Vorbemerkungen: Alle heute bekannten von MOIVRE veröffentlichten Zeitschriftenartikel sind ausschließlich in den *Philosophical Transactions* (künftig abgekürzt *PT*) erschienen. DE MOIVRE hatte die Absicht, auch für die *Acta Eruditorum* (künftig abgekürzt *AE*) zu schreiben[23]. JOHANN BERNOULLIS Antwort[24] auf DE MOIVRES diesbezügliche Anfrage war nicht ermutigend. Es ist nicht bekannt, daß DE MOIVRE jemals eine eigene Arbeit in seiner Muttersprache veröffentlicht hätte. So bleiben nur die 15 in den *PT* erschienenen Artikel:

1. *Specimina quaedam illustria Doctrinae Fluxionum sive exempla quibus Methodi istius Usus et praestantia in solvendis Problematis Geometricis elucidatur, ex Epistola Peritissimi Mathematici D. Ab. de Moivre desumpta.*

   PT Nr. 216, 1695, S. 52—57.

2. *A Method of Raising an infinite Multinominal to any given Power, or Extracting any given Root of the same. By Mr. Ab. De Moivre.*

   PT Nr. 230, 1697, S. 619—625.

3. *A Method of extracting the Root of an Infinite Equation. By A. De Moivre, F.R.S.*

   PT Nr. 240, 1698, S. 190—193.

4. *The Dimension of the Solids generated by the Conversion of Hippocrates's Lunula, and of its Parts about several Axes, with the Surfaces generated by that Conversion, by Ab. De Moivre F.R.S.*

   PT Nr. 265, 1700, S. 624—626.

5. *Methodus quadrandi genera quaedam Curvarum, aut ad Curvas Simpliciores reducendi. per A. De Moivre R.S.S.*

   PT Nr. 278, 1702, S. 1113—1127.

6. *Aequationum quarundam Potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar Regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani, Resolutio Analytica*[25]*. Per Ab. De Moivre, R.S.S.*

   PT Nr. 309, 1707, S. 2368—2371.

7. *De Mensura Sortis, Seu, De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus. Autore Abr. De Moivre, R.S.S.*

   PT Nr. 329 (diese Arbeit umfaßt die ganze Nummer), 1711, S. 213—264.

8. *Solutio generalis altera praecedentis Problematis, ope Combinationum et Serierum infinitarum*[26]*, per Abr. de Moivre. Reg. Soc. Sodalem.*

   PT Nr. 341, 1714, S. 145—158.

---

[23] Siehe Brief DE MOIVRE an JOHANN I BERNOULLI, London, 6. 7. 1708 (a.S.), in WOLLENSCHLÄGER a.a.O., S. 257.

[24] JOHANN I BERNOULLI an DE MOIVRE, 9. 4. 1710 (n.S.), siehe WOLLENSCHLÄGER a.a.O., S. 268.

[25] Wieder abgedruckt in NEWTONS *Arithmetica Universalis*, Leiden 1732, S. 270—273.

[26] Das *Problema praecedens* ist das verallgemeinerte Problem 15 der *Mensura Sortis*. Für die Spielregeln des zugrundeliegenden *Jeu de la Poule* siehe Fußnote 164.

9. *A ready Description and Quadrature of a Curve of the Third Order, resembling that commonly call'd the Foliate. Communicated by Mr. Abr. de Moivre, F.R.S.*

   PT Nr. 345, 1715, S. 329—331.

10. *Proprietates quaedam simplices Sectionum Conicarum ex Natura Focorum deductae; cum Theoremate generali de Viribus Centripetis; quorum Ope Lex Virium Centripetarum ad Focos Sectionum tendentium, Velocitates Corporum in illis revolventium, et Descriptio Orbium facillime determinantur. Per Abr. de Moivre. R.S.Soc.*

    PT Nr. 352, 1717, S. 622—628.

11. *De Maximis et Minimis quae in motibus Corporum Coelestium occurrunt.*

    PT Nr. 360, 1719, S. 952—954. (Inhaltlich sicher von DE MOIVRE, Verfasser anonym[27])

12. *De Fractionibus Algebraicis Radicalitate immunibus ad Fractiones Simpliciores reducendis, deque summandis Terminis quarumdam Serierum aequali Intervallo a se distantibus. Auctore Abrahamo de Moivre, S.R.Socio.*

    PT Nr. 373, 1722, S. 162—178.

13. *De Sectione Anguli, Autore A. de Moivre, R.S.S.*

    PT Nr. 374, 1722, S. 228—230.

14. *De Reductione Radicalium ad simpliciores terminos, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio* $a+\sqrt{+b}$, *vel* $a+\sqrt{-b}$. *Epistola. Gulielmo Jones, Armigero, S.P.D. A. de Moivre.*

    PT Nr. 451, 1738, S. 463—478.

15. *A letter from Mr. Abraham De Moivre, F.R.S. to William Jones, Esquire, F.R.S. concerning the easiest method for calculating the value of annuities upon lives, from tables of observations.*

    PT Nr. 473, 1744, S. 65—78.

Ihrem Umfang nach vergleichbar mit den Veröffentlichungen in den *PT* sind zwei in die *Algebra* von NICHOLAS SAUNDERSON[28] aufgenommene Arbeiten DE MOIVRES[29].

[27] Dieser Artikel ist anonym verfaßt. Gegen MOIVRE als Autor spricht der Umstand, daß DE MOIVRE selbst als *eximius Mathematicus* zitiert wird. Auch rechnet PAUL HENRY MATY (1745—1787), der Sohn MATTHEW MATYS, in dem von ihm herausgegebenen Indexband für die Bände 1 bis 70 der *PT* (Index erschien 1787, Bd. 70 der *PT* erschien 1780) diese Arbeit nicht wie sein Vater in der *Mémoire* zu den DE MOIVRE-schen. Jedenfalls sagt der anonyme Verfasser (HALLEY ?), daß die in dem Artikel enthaltenen Ergebnisse von DE MOIVRE stammen. DE MOIVRE bestätigt diesen Sachverhalt in den *MA* (S. 231):

> *Cum vero Vir eximius [Halley] variis temporibus Problemata quaedam astronomica mihi proposuisset de Maximis et Minimis quae in motibus coelestibus occurrunt, quorum aliqua jam edita fuerunt, investigatione tamen praetermissa, alia vero iis anteriora nunquam lucem viderunt, non alienum fore duxi haec in unum collecta aliquanto fusius exponere.*

In den *PT* Abridged, London 1809, wiederum ist neben der englischen Übersetzung des Titels angegeben: By Mr. ABR. DEMOIVRE.

[28] *Elements of Algebra*, in zwei Bänden, Cambridge 1740.

[29] Diese Arbeiten sind wörtliche Wiedergaben von Briefen DE MOIVRES an SAUNDERSON bzw. von Teilen solcher Briefe.

1. In Bd. 1 der *Elements of Algebra* auf den Seiten 263—267 findet sich:
   The Solution of two Problems by Mr. A. de Moivre

   Prob. 1. The sum of four continual proportionals being given, as also the sum of their squares, to find the proportionals.

   Prob. 2. The sum of five proportionals, and the sum of their squares being given, to find the proportionals.

2. In Bd. 2 als Appendix auf den Seiten 744—748
   Mr. de Moivre's method of extracting the cubic or any other root of an impossible binomial, such as $a+\sqrt{-b}$*; with an application of that method to the extraction of any root out of any given power of the said binomial.*

Dazu kommt noch eine von seinem Schüler JAMES DODSON (gest. 1757) in dessen *The Mathematical Miscellany* II, 1753 publizierte Arbeit DE MOIVRES[30].

Es sei hier ganz kurz auch auf DE MOIVRES Übersetzungstätigkeit (englische oder lateinische Texte ins Französische) eingegangen, über deren Umfang keine Aussagen gemacht werden können, da MOIVRE in den Artikeln nie als Übersetzer genannt wird. DE MOIVRE ist bei dem ersten der beiden folgenden Artikel, beim zweiten mit großer Wahrscheinlichkeit der Übersetzer.

1. *Extrait du Livre intitulé Commercium Epistolicum Collinii et aliorum, de Analysi promota; publié par ordre de la Societé Royale à l'occasion de la Dispute élevée entre M. Leibnitz et le Dr. Keill, sur le Droit d'invention à la Méthode des Fluxions, par quelques-uns appellée Méthode Différentielle.*
   Journal Literaire 7, 1715, S. 114—158 und S. 344—365[31].

2. *Defense du Chevalier Newton. Dans laquelle on repond aux Remarques de Messieurs Jean et Nicolas Bernoully, insérées dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour les Années 1710 et 1711. Par Jean Keil, Professeur d'Astronomie à Oxford.*
   Journal Literaire 8, 1716, S. 418—433[32].

Hier ist noch zu erwähnen, daß DE MOIVRE zusammen mit VARIGNON die von P. COSTE besorgte französische Ausgabe der NEWTONschen Optik korrigiert hat[33].

---

[30] Diese Angabe stammt aus dem Artikel über JAMES DODSON in *Dictionary of National Biography* XV, London 1888.

[31] Siehe KURT MÜLLER, *Leibniz-Bibliographie*, Frankfurt a.M. 1967, Nr. 1062.

[32] Im Brief vom 26. 6. 1718 (n.S.) an JOHANN I BERNOULLI gibt MONTMORT u.a. den ABBÉ CONTI (Fußnote 91) als Gewährsmann an. Vergleiche auch den Brief NIKOLAUS I BERNOULLI an MONTMORT, Padua, 30. 7. 1718 (n.S.).

[33] Brief VARIGNONS an JOHANN I BERNOULLI, Paris, 9. 8. 1721 (n.S.):

Il [Newton] m'a desja envoyé pour cela [nämlich die französische Übersetzung der Optik Newtons] plusieurs corrections et Ecclaircissements faits sous ses yeux par M. de Moivre qui entendant mieux le françois que lui, a remarqué que le Traducteur, faute d'être assez entendu dans la matière n'a pas tousjours pris le sens de cet Auteur qui me doit envoyer le reste de ces corrections, et Ecclaircissements quand ils seront finis. J'en ay desja reçu 22 pages in fol. par manière d'Errata pour la facilité de l'imprimeur: M. de Moivre me marquant qu'il y en aura encore à peu près autant dans le reste ...

Das erste Buch, das DE MOIVRES Namen trug, entstand 1704 als Reaktion auf die Integralrechnung des schottischen Arztes GEORGE CHEYNE[34]. Der Titel: *Animadversiones in D. Georgii Cheynaei Tractatum de Fluxionum Methodo Inversa.* Stark erweitert erschien die zunächst in den *PT* veröffentlichte *Mensura Sortis* in Buchform 1718 als *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play.* Die *Doctrine* erschien, von 175 Seiten aus dem Jahr 1718 auf 259 Seiten angewachsen, erneut 1738. In dritter Auflage wurden zwei Jahre nach dem Tod DE MOIVRES zu dem geringfügig erweiterten Inhalt der zweiten Auflage die *Annuities on Lives*[35] und einige Anhänge gefügt, was das neuerliche Anwachsen auf nunmehr 348 Seiten erklärt. Die *Annuities on Lives* waren zum ersten Mal 1725 erschienen, erlebten ihre zweite Auflage *plainer, fuller, and more correct than the former* 1743. Mit einigen Verbesserungen und Erweiterungen im Tafelteil kamen 1750 und 1752 die dritte und die vierte Auflage heraus. Letztere wurde fast unverändert für die dritte Auflage der *Doctrine* verwendet. Im Jahre 1730 erschien mit den *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* die Zusammenfassung des bisherigen Schaffens in der Analysis mit Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und Astronomie. Im selben Jahr noch brachte MOIVRE ein Supplementum, in dem u.a. die STIRLINGsche Formel bewiesen ist, zum Druck. 1733 erhielten einige Freunde einen sieben Seiten starken Sonderdruck, die *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem Expansi*, in der, wie man deshalb sagen darf, der DE MOIVRESche Grenzwertsatz für binomiale Verteilungen enthalten ist.

Ob sich die beiden folgenden Stellen des Briefwechsels zwischen EULER und DANIEL BERNOULLI auf A. DE MOIVRE beziehen, konnte ich nicht feststellen. Jedenfalls steht im Brief EULERS an DANIEL BERNOULLI vom 15. 9. 1740[36]:

> *Inzwischen hat man mir geschrieben, daß der H. Moivre auch an einer Theoria Musica arbeite, und deswegen mein Opusculum darüber zu sehen verlange: ich bin aber nicht weniger begierig, desselben Gedanken darüber zu sehen.*

Im Brief DANIEL BERNOULLIS an EULER vom 5. 11. 1740 heißt es[37]:

> *Wenn Sie des Hrn. Moivre's Tractat werden gesehen haben, bitte mir Dero Meinung darüber aus.*

Einen weiteren Hinweis auf eine Beschäftigung DE MOIVRES mit Musiktheorie konnte ich ebensowenig finden wie einen anderen MOIVRE, der dafür in Frage käme.

2.3. Briefe

In diesem Abschnitt sollen neben den noch vorhandenen bekannten Originalbriefen von und an DE MOIVRE, die noch im 18. Jahrhundert veröffentlichten und die aus den bereits aufgezählten Quellen sowie den z.T. unpublizierten Briefwechseln von Korrespondenten DE MOIVRES rekonstruierbaren Briefe aufgeführt werden. Diese Dreiteilung der Briefe DE MOIVRES bietet sich deswegen an, weil keine Überschneidungen zwischen den drei Gruppen stattfinden; d.h. es gibt bis

---

[34] GEORGE CHEYNE, *Fluxionum Methodus Inversa; Sive Quantitatum Fluentium Leges Generaliores*, London 1703.

[35] Damit in fünfter Auflage.

[36] Siehe *BM* (3) 7, 1907, S. 152.

[37] Siehe *BM* (3) 7, 1907, S. 156.

heute keinen Brief von oder an DE MOIVRE, der zugleich im 18. Jh. publiziert und noch vorhanden ist. Daß sich die Gruppe der rekonstruierbaren Briefe mit den beiden anderen Gruppen nicht überschneidet, ist klar. Neben den noch im Text erhaltenen Briefen DE MOIVRES wurden die folgenden Briefwechsel von Korrespondenten zur Rekonstruktion der dritten Gruppe verwendet:

Der Briefwechsel STIRLINGS[38,39] mit verschiedenen Korrespondenten, die größtenteils noch unpublizierten Briefwechsel JOHANN I BERNOULLIS mit MONTMORT[40], mit CRAMER[41] und PIERRE VARIGNON[42,43], die ebenfalls größtenteils noch unpublizierten Korrespondenzen NIKOLAUS I BERNOULLIS mit CRAMER und MONTMORT[44], sowie ein Teil der zwischen MONTMORT und BROOK TAYLOR gewechselten Briefe[45].

Das Kapitel über die Quellen soll noch keine Inhaltsangabe, sondern lediglich eine Aufzählung und z.T. Wertung des Materials bringen. Daher habe ich in diesem Abschnitt über die Briefe auch auf Regesten verzichtet. Die wissenschaftlich interessanten Briefe werden dann bei der Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen DE MOIVRES mitgewürdigt; biographische Informationen aus den Briefen werden in Abschnitt 3 ausgewertet.

Die Briefe bzw. Briefwechsel werden in der alphabetischen Reihenfolge der Korrespondenten DE MOIVRES aufgezählt.

2.3.1. Im Original noch vorhandene Briefe

Die umfangreichste und auch wissenschaftlich ergiebigste Korrespondenz ist die zwischen MOIVRE und JOHANN I BERNOULLI. Die Originale der Briefe DE MOIVRES an JOHANN I BERNOULLI und die Briefentwürfe JOHANN I BERNOULLIS an DE MOIVRE liegen in der Bibliothek der königlich schwedischen Akademie der Wissenschaften in Stockholm[46].

1. DE MOIVRE an JOHANN I BERNOULLI, London, 22. 4. 1704 (a. S.)[47]
2. JOHANN I BERNOULLI an DE MOIVRE, Groningen, 15. 11. 1704 (n. S.)

---

[38] CHARLES TWEEDIE, *James Stirling a Sketch of his Life and Works along with his Scientific Correspondence*, Oxford 1922.

[39] Der Briefwechsel STIRLINGS mit NIKOLAUS I BERNOULLI ist nicht vollständig in TWEEDIES Schrift enthalten. Weitere Briefe liegen in der Universitätsbibliothek Basel.

[40] Zwei Briefe dieser Korrespondenz sind in der zweiten Auflage von MONTMORTS *Essay D'Analyse sur les Jeux De Hazard*, Paris 1713, S. 283—307, veröffentlicht.

[41] Genf, 1704—1752.

[42] Paris, 1654—1722.

[43] Der in der Dissertation von FEDEL, Heidelberg 1933, publizierte Abschnitt des Briefwechsels zwischen JOHANN I BERNOULLI und VARIGNON von 1692 bis 1702 ist für die Arbeit ohne Bedeutung, da DE MOIVRE in der Korrespondenz erstmalig 1707 auftaucht.

[44] Der Briefwechsel NIKOLAUS I BERNOULLI mit MONTMORT für die Jahre 1711 bis 1713 erschien fast vollständig in der zweiten Auflage von MONTMORTS Wahrscheinlichkeitsrechnung aus dem Jahr 1713.

[45] Soweit in der vom Enkel BROOK TAYLORS, WILLIAM YOUNG, in der 1793 herausgegebenen *Contemplatio Philosophica* enthalten; siehe auch HEINRICH AUCHTERS Dissertation über BROOK TAYLOR, Marburg 1937, veröffentlicht Würzburg 1937.

[46] Siehe Abschnitt 1, WOLLENSCHLÄGERS Edition des Briefwechsels.

[47] In England wurde bis 1753 nach dem julianischen Kalender (= alter Stil, abgekürzt a. S.) gerechnet, außerdem war der erste Tag des neuen Jahres der 25. März,

3. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 13. 3. 1705 (a. S.)
4. Johann I Bernoulli an de Moivre, Groningen, 5. 7. 1705 (n. S.)
5. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 27. 7. 1705 (a. S.)
6. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 16. 2. 1706 (n. S.)
7. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 25. 4. 1706 (a. S.)
8. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 8. 7. 1706 (a. S.)
9. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 6. 4. 1707 (n. S.)
10. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 2. 12. 1707 (a. S.)
11. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 6. 7. 1708 (a. S.)
12. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 9. 4. 1710 (n. S.)
13. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 18. 10. 1712 (a. S.)
14. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 23. 11. 1712 (n. S.)
15. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 17. 12. 1712 (a. S.)
16. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 18. 2. 1713 (n. S.)
17. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 20. 3. 1714 (n. S.)
18. de Moivre an Johann I Bernoulli, London, 28. 6. 1714 (a. S.)
19. Johann I Bernoulli an de Moivre, Basel, 4. 8. 1714 (n. S.)

In der Universitätsbibliothek in Basel liegen die Originale von drei Briefentwürfen des Neffen Johann I Bernoullis, Nikolaus I Bernoulli, an de Moivre, sowie das Original eines Briefes de Moivres an Nikolaus I. Bernoulli[48].

1. Nikolaus I Bernoulli an de Moivre, auf der Rückreise von London nach Paris in Holland, November 1712 abgefaßt.
2. Nikolaus I Bernoulli an de Moivre, Basel, 30. 12. 1713 (n. S.)
3. de Moivre an Nikolaus I Bernoulli, London, 3. 3. 1714 (a. S.)
4. Nikolaus I Bernoulli an de Moivre, Basel, 4. 8. 1714 (n. S.)

Beide Briefwechsel sind sehr wahrscheinlich vollständig. Erstaunlich ist zunächst der abrupte Abbruch beider Korrespondenzen im Jahre 1714. Eine Begründung hierfür mag in der verstärkten Frontstellung der um Newton gruppierten Engländer zu dem Kreis um Leibniz und die Bernoullis nach dem Urteil im Prioritätstreit und der Herausgabe des *Commercium Epistolicum* 1712/13 gesehen werden. Dies trifft bestimmt für Johann I Bernoulli zu, der im letzten Brief vom 4. 8. 1714 (n. S.) zwar seine Neutralität im Prioritätstreit beteuert, aber zugleich gegen Cheyne, Keill und Newton Stellung nimmt und die Zuverlässigkeit des *Commercium Epistolicum* bezweifelt. In seinem gleichzeitig verfaßten Brief verstand es Nikolaus I Bernoulli anläßlich einer Erläuterung

---

d.h. es wurde nach dem sogenannten *Annunciationsstil* gewechselt. Die Datierungsdifferenz zwischen dem julianischen und dem gregorianischen Kalender (= neuer Stil, abgekürzt n. S.) betrug im 18. Jh. 11 Tage, d.h. der 3. 2. 1705 (a. S.) = 14. 2. 1706 (n. S.) und der 24. 8. 1721 (a. S.) = 4. 9. 1721 (n. S.); siehe dazu F. K. Ginzel, *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie* III, Leipzig 1914. De Moivre datierte wie die Engländer nach dem julianischen Kalender, betrachtete aber den 1. Januar als Jahresanfang.

[48] Dieser Briefwechsel wird im Rahmen der Bernoulli-Edition erstmalig publiziert.

zu seiner im Brief an Montmort vom 30. 12. 1712 (n. S.)[49] gegebenen Beurteilung der *Mensura Sortis*, de Moivre an der wundesten Stelle zu treffen:

> ... *que Vos Problèmes se trouvent pour la plus part dans le Livre de Mr. de Montmort, mais que Vous aviés conçu l'énoncé de ces Problèmes plus généralement que n'a fait Mr. de Montmort et que je croyois que les autres Problèmes qui ne se trouvent pas dans le Livre de Montmort pouvoient aussi être résolus par les méthodes que Mr. de Montmort a données*[50].

Daß Moivre tatsächlich die letzten Briefe von Johann I Bernoulli und Nikolaus I Bernoulli nicht mehr beantwortet hat, wird verschiedentlich sowohl von Johann als auch von Nikolaus bestätigt. So im Brief von Johann I Bernoulli an Varignon vom 4. 7. 1719 (n. S.), in dem Johann schreibt, daß er nicht gewillt sei, an Moivre zu schreiben, da dieser ihm seit Jahren eine Antwort schulde; im Brief Nikolaus I Bernoullis an W. J. s'Gravesande vom 21. 12. 1715 (n. S.)[51]:

> *Vous me ferez aussi un plaisir de Vous informer de Mr. de Moivre, s'il n'a pas reçu une fort grande Lettre, que je lui ai écrite il y a plus d'un an, et à laquelle j'attends une réponse,*

und im Brief von Nikolaus I. Bernoulli an Cramer vom 3. 7. 1728:

> *Je Vous remercie de ce que Vous avez bien voulu présenter mes respects à Mr. de Moivre, je Vous prie de les réitérer, quand Vous en aurez l'occasion, en lui disant, que c'est la lettre, dont il parle lui même dans son Livre Doctrine of Chances page 142, à laquelle j'attends une reponse depuis 14 ans.*

Eine große Wahrscheinlichkeit, daß der Briefwechsel zwischen Moivre und Johann I Bernoulli vollständig ist, ergibt sich aus der Mitteilung von G. Cramer an Johann II Bernoulli aus dem Jahre 1740, die den Eingang von 19 Briefen dieses Briefwechsels beinhaltet.

Ein Originalbrief de Moivres an Gabriel Cramer liegt heute im Britischen Museum.

1. de Moivre an Cramer, London, 30. 4. 1731 (a. S.)[52]

Die Existenz einer Antwort Cramers an de Moivre läßt sich nachweisen. Dieser Brief wird ebenso wie ein Brief Cramers an de Moivre aus dem Jahr 1729 in 2.3.3. aufgeführt. Weitere Hinweise auf den Umfang der Korrespondenz zwischen Cramer und de Moivre fehlen.

Die Royal Society besitzt einen Brief de Moivres an Martin Folkes P. R. S. (1690—1754)[53].

---

[49] Veröffentlicht in der 2. Auflage des *Essay d'Analyse* von Montmort S. 375—387.

[50] De Moivre hatte sich im Vorwort zur *Mensura Sortis* gerade darum bemüht, seine Methoden als denjenigen Montmorts weit überlegen darzustellen.

[51] Diese Stelle bedeutet einen Hinweis auf eine Bekanntschaft zwischen s'Gravesande und de Moivre. S'Gravesande befand sich 1715 als Botschaftssekretär in London. Von einem Briefwechsel zwischen s'Gravesande und de Moivre ist nichts bekannt. In der von J. N. S. Allamand 1774 im Rahmen einer Edition der *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques de Mr. G. J. s'Gravesande* veröffentlichten Biographie des Niederländers erscheint nicht einmal der Name de Moivres.

[52] Den Hinweis auf diesen Brief verdanke ich Herrn Pierre Speziali, Genf.

[53] Dieser Brief befand sich in einem Paket, das 1932 von der Royal Society ersteigert wurde. Siehe R. E. W. Maddison, *A note on the correspondence of Martin Folkes P.R.S.*, Notes and Records of the Royal Society of London 11, 1954.

DE MOIVRE an MARTIN FOLKES

Im Leibnizarchiv in Hannover liegt ein Originalbrief DE MOIVRES an LEIBNIZ und der Entwurf des Antwortbriefes von LEIBNIZ an DE MOIVRE. Es ist unwahrscheinlich, daß zwischen diesen beiden Männern mehr Briefe gewechselt wurden; LEIBNIZ hat sich später durch JOHANN I BERNOULLI über DE MOIVRE informiert[54].

1. DE MOIVRE an LEIBNIZ, London, 10. 4. 1706 (a. S.)
2. LEIBNIZ an DE MOIVRE, Hannover, 24. 6. 1706 (n. S.)

In der *BM*[55] findet sich ein Aufsatz von H. BATEMAN, *The correspondence of Brook Taylor.* In dieser Arbeit wird auch ein Brief DE MOIVRES an TAYLOR als noch in Familienbesitz befindlich erklärt. Wo dieser Brief heute ist, konnte ich nicht ermitteln. Über die weitere Korrespondenz zwischen BROOK TAYLOR und DE MOIVRE siehe Abschnitt 2.3.3.

2.3.2. Im 18. Jh. publizierte Briefe

In diesen Abschnitt sind auch die in Briefform gehaltenen Abhandlungen DE MOIVRES aus den *PT* aufgenommen.

In dem ersten von DE MOIVRE veröffentlichten Buch, den *Animadversiones*, ist ein Brief JOHN COLSONS an DE MOIVRE auf den Seiten 53—73 abgedruckt[56]. JOHN COLSON[57] war, wie aus Bemerkungen DE MOIVRES im Vorwort zu den *Animadversiones* hervorgeht, einer seiner Schüler. COLSON wurde 1713 Mitglied der ROYAL SOCIETY und erhielt 1739 die LUCASische Professur in Cambridge.

JOHN COLSON an DE MOIVRE, 15. 11. 1703 (a. S.)

Die für ihn so wichtige Bekanntschaft EDMOND HALLEYS (1656—1742) machte MOIVRE schon ziemlich früh. MOIVRES erste Abhandlung in den *PT* war in Briefform gehalten bzw. aus einem Brief entnommen, ohne daß in den *PT* der Empfänger genannt wurde. Aus der *Mémoire* von MATY wird klar, daß dieser Empfänger HALLEY war:

> *Mr. Halley rapporta le 26 Juin 1695 à la Société Royale, qu'un François nommé Mr. de Moivre lui avoit depuis peu communiqué une amméliorations de la méthode des fluxions ou différentielle inventée par Mr. Newton ... Sur ce rapport, et sans doute de l'aveu de Newton même cet écrit fut publié dans les Transactions Philosophiques de la même année.*

1. DE MOIVRE an EDMOND HALLEY, 1695 (= *PT* Nr. 216, 1695, S. 52—57).

Ein weiterer Brief MOIVRES an HALLEY fand sich im Nachlaß HALLEYS und wurde zum ersten Mal 1761 in der Juninummer der Zeitschrift The Mathematical Magazine and Philosophical Repository auf den Seiten 41—43 abgedruckt[58]. Der Brief enthält einen Beweis für eine von HALLEY erstmalig 1705[59] veröffentlichte Zinseszinsformel.

---

[54] Siehe Briefwechsel, hrsg. von CASTILLON, *Virorum Celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium Philosophicum et Mathematicum*, Lausanne/Genf, 1745.

[55] *BM* (3) 7, 1906/07, S. 367—371.

[56] Durch einen Fehler in der Paginierung endet der Brief auf S. 67, die jedoch bei richtiger Zählung mit 73 numeriert werden müßte.

[57] 1680—1760.

[58] Diese Zeitschrift erschien nur in fünf Nummern in der Zeit von April bis August 1761.

[59] In der Einführung von SHERWINS *Tables of Logarithms.*

2. DE MOIVRE an EDMOND HALLEY, nach 1705[60, 61].

Zwei weitere Veröffentlichungen in den *PT* sind Briefe, die an WILLIAM JONES (1675—1749) gerichtet waren.

1. DE MOIVRE an WILLIAM JONES, 1740 (= *PT* Nr. 451, S. 463—478)
2. DE MOIVRE an WILLIAM JONES, 1744 (= *PT* Nr. 473, S. 65—78)[62]

Die vierte Arbeit in den *PT* in Briefform ist an JOHN MACHIN gerichtet[63].

DE MOIVRE an JOHN MACHIN, 2. 8. 1722 (a. S.) (= *PT* Nr. 373, 1722, S. 162—178).

Der Vorgänger JOHN COLSONS auf dem LUCASischen Lehrstuhl in Cambridge war NICHOLAS SAUNDERSON (1682—1739), der dort von 1711 bis 1739 die Professur für Mathematik innehatte. DE MOIVRE war mit SAUNDERSON befreundet und stand im Briefwechsel mit ihm. Im zweiten Band der posthum 1740 veröffentlichten *Elements of Algebra* NICHOLAS SAUNDERSONS findet sich ein Brief N. SAUNDERSONS an DE MOIVRE vom 26. 9. 1738 (a. S.). Ein weiterer in den *Elements* abgedruckter Brief, den DE MOIVRE an den Herausgeber von SAUNDERSONS *Algebra* (JOHN COLSON?) gerichtet hatte, ist vom 29. 4. 1740 (a. S.). Eine Stelle in diesem Brief läßt auf einen umfangreicheren Briefwechsel DE MOIVRES mit N. SAUNDERSON schließen: *Among several letters which I have received from my late worthy Friend Dr. Saunderson, there is one wherein he was pleased*[64] *to put a question to me* ...

Außerdem geht aus dem Brief N. SAUNDERSONS an DE MOIVRE vom 26. 9. 1738 (a. S.) hervor, daß die in den ersten Band der *Elements* eingerückte Abhandlung DE MOIVRES in Briefform mitgeteilt wurde. Damit finden sich die folgenden Briefe in den *Elements:*

1. DE MOIVRE an NICHOLAS SAUNDERSON, vor dem 26. 9. 1738[65]
2. NICHOLAS SAUNDERSON an DE MOIVRE, Cambridge, 26. 9. 1738[66]

DE MOIVRE an den Herausgeber der *Elements*, 29. 4. 1740 (a. S.)[67]

über die anderen Briefe der Korrespondenz zwischen N. SAUNDERSON und DE MOIVRE ist bis heute nichts bekannt.

Ebenfalls mit DE MOIVRE befreundet war JAMES STIRLING (1692—1770), der sich wie DE MOIVRE mit der Abschätzung von Binominalkoeffizienten der Form $\binom{2n(+1)}{n}$ und von $n!$ für sehr große n interessierte. In den *Miscellanea Analytica* ist ein Brief STIRLINGS abgedruckt, in dem dieser seine Ergebnisse für die Abschätzung der Binomialkoeffizienten vorlegt.

---

[60] Der Brief wurde wieder abgedruckt in FRANCIS MASERES, *Scriptores Logarithmici* V, 1804, S. 520—522, und in The Mathematical Gazette 14, 1929, S. 574f.

[61] In EUGENE FAIRFIELD MAC PIKE, *Correspondence and Papers of Edmond Halley*, Oxford 1932 und London 1937, wird kein Briefwechsel zwischen HALLEY und DE MOIVRE erwähnt.

[62] In den *PT* findet sich der Vermerk: *Presented June 7. 1744.*

[63] JOHN MACHIN (1680—1751) war zu dieser Zeit Sekretar der ROYAL SOCIETY.

[64] Dies ist der Brief N. SAUNDERSONS an DE MOIVRE vom 26. 9. 1738 (a. S.).

[65] *Elements* S. 263—266; von diesem Brief ist nur der mathematische Inhalt abgedruckt.

[66] *Elements* S. 743f.

[67] *Elements* S. 744—748.

1. James Stirling an de Moivre, 19. 6. 1729 (a. S.)

Die Existenz von einem weiteren Brief Stirlings wird in dem folgenden Abschnitt 2.3.3. nachgewiesen.

2.3.3. Aus dem Gesamtmaterial erschlossene Briefe, die weder im Original noch in einem Abdruck vorhanden sind

In diesem letzten Teil der Briefe werden die in 2.3.1. und 2.3.2. nicht erfaßten Korrespondenten mit den zugehörigen Briefen und von bereits aufgeführten Korrespondenten die Briefe, von denen man nur die Existenz nachweisen kann, aufgezählt. Soweit Inhaltsangaben, wörtliche Zitate oder größere Teile der Briefe bekannt sind, wird dies besonders vermerkt.

Im Brief vom 9. 9. 1729 (n. S.) an Nikolaus I Bernoulli kündigt Cramer einen Brief an de Moivre an und zitiert daraus die Lösung eines ihm von de Moivre gestellten Wahrscheinlichkeitsproblems: *Voici la Solution que je lui* [de Moivre] *envoyai le Lendemain.*

2. Cramer an de Moivre, 10(?). 9. 1729 (n. S.)

Zu dem in 2.3.1. erwähnten Brief de Moivres an Cramer vom 30. 4. 1731 (a. S.) kann ein Antwortbrief Cramers erschlossen werden aus dem Brief Cramers an James Stirling vom 22. 2. 1732 (n. S.)[68]:

Au reste j'ai reçu le Livre que Mr. de Moivre m'a envoyé en présent. J'ai pris la Liberté de lui en faire mes remercimens dans une Lettre dont j'ai chargé un jeune homme d'ici, qui est parti il y a quelques mois pour l'Angleterre.

3. Cramer an de Moivre, Ende 1731

Durch Johann I Bernoulli wurde die Verbindung zwischen de Moivre und Jakob Hermann (1678—1733), dem Schüler Jakob Bernoullis, vermittelt. Zwei Briefe der Korrespondenz de Moivres mit Jakob Hermann können aus dem Briefwechsel de Moivres mit Johann I Bernoulli belegt werden.

1. de Moivre an Jakob Hermann, London, 8. 7. 1706 (a. S.)

Erschlossen aus de Moivre an Johann I Bernoulli 8. 7. 1706 (a. S.): *Cela est accompagné de deux lettres, l'une pour vous et l'autre pour M. Herman.*

2. Jakob Hermann an de Moivre, 1707

Der Empfang dieses Briefes, den Johann I Bernoulli im Brief an de Moivre vom 6. 4. 1707 (n. S.) angekündigt hatte, wurde von de Moivre im Brief vom 2. 12. 1707 (a. S.) an Johann I Bernoulli bestätigt[69]: *Un mal de tête qui m'a tenu pendant 6 mois m'a empêché de repondre à la dernière lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire et à celle de M. Herman.*

Ebenso wie James Stirling war Colin Maclaurin (1698—1746) Schotte. Auch er stand im Briefwechsel mit de Moivre. Zwei Briefe lassen sich aus der Korrespondenz Maclaurins mit Stirling nachweisen.

---

[68] Tweedie a. a. O., S. 128.

[69] Der Briefwechsel zwischen J. Hermann und de Moivre ist verschollen. Auch in Basel, wo die Manuskripte Hermanns für eine Edition im Rahmen der Bernoulli-edition gesammelt sind, findet sich nichts.

1. Maclaurin an de Moivre, 1730(?).

Erschlossen aus dem Brief Maclaurin an Stirling, 1730(?)[70]: *If you see Mr de Moivre soon, please to tell him I send him by this post a bill for six guineas and a letter directed to Slaughter's Coffee House. I did not know where else to direct for him.*

2. de Moivre an Maclaurin, Januar 1738.

Aus Maclaurin an Stirling, 4. 2. 1737 (a. S.)[71]: *I had a letter from Mr de Moivre where he desyres to give his humble service to you. His book*[72] *was to be out last week.*

De Magneville (oder de Manneville) war Schüler de Moivres, wahrscheinlich auch Johann I Bernoullis. Johann schilderte ihn im Brief an Leibniz vom 7. 8. 1699 als *exulem Gallicum*, der *familiariter novit Dominum Moivraeum*. De Magneville war auch Johanns Gewährsmann für die intime Bekanntschaft de Moivres mit Nicolas Fatio de Duillier. Von dem mutmaßlich umfangreicheren Briefwechsel zwischen de Magneville und de Moivre lassen sich zwei Briefe nachweisen. Zunächst im Brief von Moivre an Johann I Bernoulli vom 27. 7. 1705 (a. S.):

> *Je vous supplie, M. de vouloir bien fair mes complimens à M. de Magneville. Toutes les amis luy baisent les mains. Je seray bien aise d'avoir une lettre de luy avant qu'il parte pour Genève, et comme je luy en devray deux, je tacheray de le payer par une lettre qui soit de la longueur de deux autres.*

1. de Magneville an de Moivre, vor dem 27. 7. 1705 (a. S.)

Weiter bestätigt de Moivre einen Brief von de Magneville im Brief an Johann I Bernoulli vom 8. 7. 1706 (a. S.): *Je reçus une lettre de M. de Magneville il y a 10 ou 12 jours, dans laquelle il me mande ...*

2. de Magneville an de Moivre, Juni 1706

Kurz vor seinem Tod wurde de Moivre Mitglied der Pariser Akademie[73]. Die Nachricht von seiner Aufnahme veranlaßte de Moivre zu einem Brief an d'Ortous de Mairan (1678—1771)[74]. Über diesen Brief berichtet Maty in seiner *Mémoire* (S. 38):

> *Il la [die Nachricht seiner Aufnahme] reçut avec transport, déclara plusieurs fois qu'il regardoit cette élection comme des lettres de noblesse, et exprima a Mr. de Mairan, dans la lettre, qu'il eut la force de dicter et de signer, la vivacité de son zèle et de sa reconnoissance.*

de Moivre an d'Ortous de Mairan, Juli(?) 1754

Der Briefwechsel zwischen de Moivre und Pierre Rémond de Montmort (1678—1719), dem mit de Moivre in der Wahrscheinlichkeitsrechnung konkurrierenden französischen Mathematiker, kann in seinem Umfang und seiner zeitlichen Aufeinanderfolge ziemlich gut rekonstruiert werden. Zum Teil sehr genaue Angaben macht de Moivre selbst im siebten Buch der *MA*, der *Responsio ad quasdam criminationes*. Dieser Abschnitt der *MA* ist fast ausschließlich der Auseinandersetzung mit direkten und indirekten Vorwürfen Montmorts vorbehalten.

[70] Siehe Tweedie a.a.O., S. 72, Briefnummer (7).

[71] Tweedie a.a.O., S. 76.

[72] *The Doctrine of Chances*, 2. Auflage, London 1738.

[73] Am 27. 6. 1754 (n. S.), siehe *Eloge* von de Fouchy.

[74] De Mairan wurde *secrétaire perpétuel* der *Académie des Sciences* 1740; 1743 wurde Grandjean de Fouchy ständiger Sekretar.

Aus den *MA* (S. 147):

Anno 1713 Dom. Montmort librum suum denuo edidit;[75] *cum vero in secunda Editione plura requirentur quae prior Editio non habuerat, eam ad me mitti curaverat, hanc comitabantur literae quibus significabat se in ea spe esse, me eam pluris facturum quam priorem feceram,*

und dem Brief DE MOIVRES an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 3. 3. 1714 (a. S.):

Je viens de recevoir une lettre de Monsieur de Montmaur [sic] qui me mande qu'il m'envoye son livre et qu'il le croit actuellement entre les mains de Monsieur Waller ... la lettre de Monsieur de Montmaur est fort obligeante dans un sens

läßt sich schließen, daß die Korrespondenz durch einen Brief

1. MONTMORT an DE MOIVRE, Februar (?) 1714

eröffnet wurde. Der Antwort- und Dankesbrief im Anschluß an den Erhalt des Buches von MONTMORT wird zunächst in den *MA* (S. 148) erwähnt:

Ut Librum Cl. Viri accepi, ad eum scripsi me de dono suo plurimas ei agere gratias ... ex eo tempore mihi cum illo intercessit familiaritas, et alter ad alterum frequentes dedimus literas.

Er kann durch einen Brief MONTMORTS an NIKOLAUS I BERNOULLI[76], der auch eine Inhaltsangabe und ein längeres wörtliches Zitat enthält, genauer datiert werden: *Je viens de recevoir une lettre de Mr. Moivre infiniment polie et honeste au sujet de mon livre que je luy ai envoyé.* Im selben Brief als Zitat aus dem Brief DE MOIVRES an MONTMORT: *Monsieur Bernoulli*[77] *fust reçu membre de la Societé Royale la semaine dernière*[78] ...

2. DE MOIVRE an MONTMORT, Mitte März 1714

Dieser Brief und eine Antwort MONTMORTS wird in dem Brief DE MOIVRES an JOHANN I BERNOULLI vom 28. 6. 1714 (a. S.) bestätigt:

Au reste pour ce qui regarde M. de Monmort, je lui écrivis il y a quelque temps pour le remercier pour un exemplaire de son livre qu'il m'avoit envoyé; il m'a récrit d'une manière si honnête, si obligeante ...

3. MONTMORT an DE MOIVRE in der Zeit April—Juni 1714

Aus den folgenden drei Briefen läßt sich der Antwortbrief DE MOIVRES rekonstruieren.

MONTMORT an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 15. 8. 1714 (n. S.). Dieser Brief enthält eine Inhaltsangabe und längere Zitate aus dem MOIVRE-Brief:

J'ay reçu il y a environ 15 jours une lettre du grand Newton. J'en reçus une en même temps de Mr. Moivre; celle de Mr. Newton n'étoit que civilté, celle de Mr. Moivre est de six grandes pages. Je vais vous en rendre compte.

---

[75] Zweite Auflage des *Essai d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris 1713. Der am Ende des Buches abgedruckte *Privilège du Roy* ist datiert 4. 12. 1713, der letzte im *Essay* enthaltene Brief MONTMORT an NIKOLAUS I BERNOULLI trägt das Datum 15. 11. 1713. Es ist daher anzunehmen, daß das Buch wirklich erst 1714 erschienen ist.

[76] Der Brief ist nicht datiert, kann aber aus dem Inhalt als im April 1714 abgefaßt geschlossen werden.

[77] NIKOLAUS I

[78] NIKOLAUS I BERNOULLI wurde am 11. 3. 1714 (a. S.) in die ROYAL SOCIETY aufgenommen, siehe auch Brief DE MOIVRES an JOHANN I BERNOULLI vom 28. 6. 1714 (a. S.).

Montmort an Nikolaus I Bernoulli vom 22. 3. 1715 (n. S.)[79]: *Mr. Moivre m'a communiqué dans une lettre qu'il m'a écrit il y a quelque temps ...*

Montmort an Nikolaus I Bernoulli vom 31. 12. 1718 (n. S.): *C'est de ce prob. que me parloit M. Moivre dans une lettre du 12. Juillet 1714 en ces termes ...*

4. de Moivre an Montmort, 12. 7. 1714 (a. S.)

Diesen Brief und im Anschluß daran den Fortgang der Korrespondenz findet man in den *MA* (S. 149) bestätigt: *Cumque ad eum scripsissem me penes me habere methodum serierum qua quaedam praestare possem quae vix methodus ulla alia attingeret, ille sic rescripsit literis datis 26. Mart. 1715.*

5. Montmort an de Moivre, 26. 3. 1715 (n. S.)

In den *MA* (S. 149) erwähnt de Moivre einen weiteren Brief Montmorts: *Paucis post diebus quam haec scripta erant*[80], *novas accepi literas datas Lutetiae*[81] *17 Ap. 1715.*

6. Montmort an de Moivre, 17. 4. 1715 (n. S.)

In diesem letzten Brief hatte Montmort seinen Besuch in London angekündigt. In London lernte Montmort de Moivre, der sich sehr um den Gast bemühte, persönlich kennen. Montmort war nach England gefahren, um eine dort am 3. Mai 1715 (n. S.) beobachtbare totale Sonnenfinsternis[82] mitzuerleben und um Newton und andere englische Wissenschaftler kennenzulernen. In den *MA* (S. 149) berichtet de Moivre vom schriftlichen Dank Montmorts nach dessen Rückkehr nach Paris und einer darauffolgenden Unterbrechung der Korrespondenz: *Ubi Lutetiam rediit, scripsit, se in memoria semper habiturum tot beneficia in se collata ... Ex eo tempore scribere intermisimus.*

Diesen Sachverhalt bestätigen die Briefe Montmorts an Brook Taylor vom 2. 1. 1716 (n. S.): *Bien de reproches s'il vous plait à mon bon ami Mons. Moivre de ce qu'il m'oublie et ne m'écrit point comme il me l'avoit promis.* In einer Nachschrift zum selben Brief heißt es: *Je suis ravi d'apprendre que Mr. Moivre que j'aime beaucoup, pense a moy, mais je suis en même temps bien faché de sçavoir que sa santé n'est pas bonne.* Vom 31. 3. 1716 (n. S.) in einem P. S.: *Dittes je vous prie à Mons. Moivre que je ne veux plus l'aimer puisqu'il m'oublie,* und vom 12. 4. 1716 (n. S.): *Je serois curieux de sçavoir quelle raison Mr. Moivre peut avoir pour ne me plus écrire apres m'avoir écrit deux fois depuis mon départ d'Angleterre.*

Damit ergeben sich zwei Briefe:

7. Montmort an de Moivre, nach dem 3. 5. 1715 (n. S.)

8. Montmort an de Moivre, nach diesem Brief und vor dem 12. 4. 1716 (n. S.) wahrscheinlich aber noch 1715

Der Briefwechsel ruhte darauf bis zum Druck der *Doctrine of Chances* im Jahr 1718. De Moivre schickte sein Buch mit einem Begleitbrief an Montmort. Dies

[79] Daß hier und in dem folgenden Belegbrief Montmorts an Nikolaus I Bernoulli immer von ein und demselben Brief die Rede ist, ist durch Vergleich der beigefügten Inhaltsangabe gesichert.

[80] Brief Montmort an de Moivre vom 26. 3. 1715 (n. S.).

[81] Lutetia = Paris.

[82] Siehe Th. v. Oppolzer, *Canon der Sonnenfinsternisse.*

wird geschildert in den *MA* (S. 150): *Ut primum secunda Editio libri mei in lucem exiit*[83], *eam ad D. Montmort misi qui de ea gratias egit,* und im Brief Montmorts an Nikolaus I Bernoulli vom 8. 6. 1719 (n. S.): *Mr. Taylor qui est ami de Mr. Moivre veut absolument que je luy écrive pour le remercier de son livre qu'il m'a envoyé et d'une lettre très polie et très bien écritte, dont il a accompagné son présent.* Montmort wollte, wie er weiter in diesem Brief an Nikolaus I Bernoulli ausführte, nichts mehr zu tun haben mit einem Menschen wie Moivre, der in die *Doctrine of Chances* Ergebnisse der zweiten Auflage des *Essay d'Analyse* übernommen habe, ohne dabei Montmort oder Nikolaus I Bernoulli zu erwähnen. An Brook Taylor, der ihn wiederholt dazu aufgefordert hatte, schickte Montmort schließlich einen Brief mit Belegen für seine Vorwürfe gegen de Moivre. Taylor antwortete, er sehe nichts Unrechtes in de Moivres Verhalten, und kündigte an, daß sich de Moivre rächen werde, falls Montmort sich weiterhin weigere, de Moivre zu antworten. Ob Montmort auf diese Drohung hin, die er doch so ernst nahm, daß er sich sofort der Hilfe Nikolaus I Bernoullis zu versichern suchte, de Moivre geantwortet hat, ist ungewiß. Sicher ist jedenfalls der Brief

9. de Moivre an Montmort, 1718

Der Tod Montmorts am 7. 10. 1719 verhinderte jede weitere Verständigung.

In Matys *Mémoire* (S. 31) findet sich der Hinweis auf einen Brief de Moivres an das Mitglied der Berliner Akademie, Professor Philipp Naudé (1684—1747):

> *Mr. Naudé fameux Mathématicien de Berlin, à qui Mr. de Moivre avoit envoyé ce livre, pour y être presenté avec une lettre qui contenoit la solution de plusieurs problèmes d'Algèbre à l'Académie des Sciences de cette Ville, proposa à cette Académie, dans l'Assemblée du 23. Août 1735 ...*

Der Briefwechsel zwischen de Moivre und Ph. Naudé war sicher umfangreicher. Hinweise darauf geben die Protokolle der Berliner Akademiesitzungen. Auch über die von Maty erwähnte Sitzung vom 23. 8. 1735 (n. S.) existiert ein ausführlicher Bericht:

> *Idem Leget vor ein von Hrn. Abraham de Moivre zu London der Societät geschenktes Buch*[84] *mit Vermelden, daß dieser als Autor desselbigen grundgelehrten Werks solches dem hiesigen Professor Naudé mit einem weitläufigen, einige Algebraische Schwierigkeiten auflösenden Brief geschicket und ihn darin ersuchet, gemehltes Buch der Societät zu verehren. H. Naudé habe bey Übergebung desselben sich angebothen mit nächstem in der Beantwortung berührten Schreibens dem Hrn. de Moivre Namens der Societät geziemenden Dank abzustatten, zugleich auch angefraget, ob nicht die Societät diesen berühmten Mathematicum, der sogar in Engelland wenig seines gleichen hat, und ein vornehmes Mitglied der dasigen gelehrten Gesellschaft ist, von freyen Stücken in die hiesige aufnehmen wolle.*
>
> *Welches dann einstimmig Erliebet worden und soll das auszufertigende Diploma Receptionis dem Hrn. Naudé zur Überschickung zugestellet werden.*

Am 27. 9. 1736 (n. S.) wurde in der Akademie ein Brief de Moivres an Ph. Naudé verlesen, in dem sich de Moivre für die Aufnahme bedankt. Auch über diese Sitzung existiert ein Protokoll:

---

[83] De Moivre faßt die erste Auflage der *Doctrine* als die zweite der *Mensurasortis* auf.

[84] Die *Miscellanea Analytica.*

H. Naudé verlieset einen Brief des berühmten Mathematici Abrah. de Moivre zu London, worin derselbe sich entschuldiget, daß er durch eine langwierige Unpäßlichkeit verhindert worden, sich eher für das übersandte Diploma Receptionis gebührend zu bedanken, und dabey einen Beytrag zu den Miscellaneis zu verfertigen[85]*. Inzwischen aber dieses, so bald es seine Gesundheit und Umstände zulassen würde, zu bewerkstelligen bereit sey. Zugleich übergab auch Herr Naudé ein in lateinischer Sprache abgefaßtes Danksagungs Schreiben gedachten Hrn. Moivre an die Societaet, welches dann abgelesen ward. Hiernächst zeiget H. Naudé an, daß H. Moivre veritzo im Begriff sey eine zweyte Auflage von seinem vortrefflichen Werke, doctrine of chances genannt, drucken zu lassen und zwar durch Subscriptiones, wie das vorgelegte Programma mitmehrem besage. H. Naudé wolle Sorge tragen, daß ein Exemplar dieses Werks für die Societaet Bibliothec angeschaffet werde und damit der grundgelehrte H. Moivre desto eher bewogen werde, einen Beytrag zu den Miscellaneis einzusenden*[86]*, so würde rathsam seyn, selbigem ein Exemplar der Miscellaneorum zu übermachen, welches er dann besorgen würde, weil er ohne dis demselben eine Antwort schuldig wäre. Welches alles einhelligen Beyfall gefunden.*

Aus der Bemerkung MATYs und den Protokollen der Akademie in Berlin läßt sich ein privater Briefwechsel zwischen PHILIPP NAUDÉ und DE MOIVRE, in dem auch reine Akademieangelegenheiten enthalten sind, erschließen[87].

1. DE MOIVRE an PHILIPP NAUDÉ, 1735 (wahrscheinlich nicht lange vor dem 23. 8. 1735)
2. PHILIPP NAUDÉ an DE MOIVRE, 1735(?)
3. DE MOIVRE an PHILIPP NAUDÉ, 1736 (vor dem 27. 9. 1736)

DE MOIVRE an die BERLINER AKADEMIE (lateinisch) gleichzeitig mit dem vorhergehenden Brief.

Ein weiterer Brief STIRLINGs an DE MOIVRE — in 2.3.2. ist bereits ein Brief vom 19. 6. 1729 (a. S.) aufgeführt — ist im *Supplementum* zu den *MA* erwähnt: *Aliquot post diebus quam Liber qui inscribitur Miscellanea Analytica, in lucem prodiisset, Doctissimus Stirlingius me literis admonuit ...*

In diesem Brief teilte STIRLING DE MOIVRE u.a. seine Formel für $\log(n!)$ mit. Da das Vorwort der *MA* das Datum 7. 1. 1729/30 (a. S.) trägt, dürfte dieser Brief, von dem DE MOIVRE sagt, daß er einige Tage nach Erscheinen der *MA* abgefaßt wurde, noch im Januar 1730 geschrieben worden sein.

2. JAMES STIRLING an DE MOIVRE Januar (?) 1730

Ein Briefwechsel mit BROOK TAYLOR, von dem schon in 2.3.1. die Rede war, wird von DE MOIVRE in den *MA* (S. 142) geschildert:

Decem abhinc circiter annis, cum ego animi oblectandi gratia ad eruditissimum virum D. Brook Taylor scripsissem me posse accurate summam exhibere seriei

$$\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{5\cdot 7}\cdot\frac{1}{27}+\frac{5}{7\cdot 9}\cdot\frac{1}{81}\quad \textit{etc.}$$

pollicens me methodum id conficiendi ei brevi missurum, ille post lectam epistolam, cum existimaret me eodem jure id in me recipere velle ut hanc seriem ad potestates indeterminatae quantitatis transferrem, illico rescripsit se pro certo habere me id praestare non posse; ubi vero responsum miserat, mox est suspicatus me seriem hanc

[85] Die *Miscellanea Berolinensia* bestanden von 1710 bis 1743.

[86] In den *Miscellanea Berolinensia* ist keine Arbeit DE MOIVRES veröffentlicht.

[87] Im Archiv der Akademie befindet sich kein Brief dieses Briefwechsels. Der Nachlaß von PHILIPP NAUDÉ ist verschollen.

determinasse ad potestates fractionis $\frac{1}{3}$; quamobrem postridie quam illius responsum acceperam, epistolam novam a Viro Cl. accepi qua significabat se ope methodi suae incrementorum summam seriei meae reperisse ... Sub fine Epistolae rogavit me Vir Cl. ut eum participem facere vellem Methodi meae quam ego ultro pollicitus eram, cui cum obtemperassem, tertiam misit Epistolam qua me certiorem fecit ...

Nach dieser Schilderung hat DE MOIVRE in einem relativ kurzen Intervall des Zeitraums 1718—1720 in der folgenden Reihenfolge fünf Briefe mit TAYLOR gewechselt:

1. DE MOIVRE an TAYLOR
2. TAYLOR an DE MOIVRE
3. TAYLOR an DE MOIVRE (ein Tag Abstand zum vorhergehenden Brief)
4. DE MOIVRE an TAYLOR
5. TAYLOR an DE MOIVRE

Die letzte Korrespondenz in dieser Aufzählung ist die bei weitem umfangreichste. Der Briefwechsel mit PIERRE VARIGNON (1654—1722) begann wohl durch indirekte Vermittlung JOHANN I BERNOULLIS. JOHANN I BERNOULLI hatte VARIGNON als Mittelsmann in Paris für die Korrespondenz angegeben. An ihn schickte DE MOIVRE seine *Animadversiones* am 8. 7. 1706 (a. S.), anscheinend ohne jeden Begleitbrief. Es mag für DE MOIVRE schwer gewesen sein, nachdem ihn das offizielle Frankreich gezwungen hatte im Exil zu leben, den ersten Schritt zu neuen Kontakten in Paris zu tun. Dem mutmaßlich die Korrespondenz eröffnenden Dankesbrief VARIGNONS folgt erst spät (1714) ein Brief DE MOIVRES. Für die Jahre 1714/15 lassen sich fünf Briefe nachweisen. Erneut erscheint eine Lücke bis 1719. Von da an bis zum Tod VARIGNONS am 22. Dezember 1722 (n. S.) wurden nachweislich 24 Briefe gewechselt. Inwieweit die hier auftretenden Lücken dem wirklichen Verlauf der Korrespondenz entsprechen, kann ich nicht beurteilen, da mit zwei Ausnahmen alle Belegstellen aus dem Briefwechsel zwischen JOHANN I BERNOULLI und VARIGNON entnommen wurden. Es ist daher möglich, daß der zwar im Grunde JOHANN I BERNOULLI gegenüber recht mitteilsame VARIGNON Briefe an oder von MOIVRE nicht erwähnt hat. So ist es durchaus denkbar, daß VARIGNON DE MOIVRE in seinen Briefen an JOHANN I BERNOULLI in der Zeit zwischen Januar 1715 und Mai 1719 nicht mehr erwähnt, da DE MOIVRE die Korrespondenz mit JOHANN I BERNOULLI abgebrochen und vielleicht auch seine Gründe für diesen Schritt VARIGNON erklärt hatte. Die Vermittlerrolle DE MOIVRES und VARIGNONS im Streit zwischen JOHANN I BERNOULLI und NEWTON erklärt die genauen Berichte VARIGNONS über seinen Briefwechsel mit DE MOIVRE in den Briefen an JOHANN I BERNOULLI von 1719 bis 1722.

1. VARIGNON an DE MOIVRE Mai 1707

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 4. 6. 1707 (n. S.):

Voici une lettre de remerciment que je vous prie de lui faire tenir, dans laquelle je ne lui dis rien dans cette querelle: je lui écris seulement en general que j'ay trouvé plusieurs choses dignes de remarque dans ses Animadversions, et que ... Pardon de vous charger de cette lettre, qui est faite desja depuis près d'un mois; mais je n'ay point d'autre voye présentement de la faire tenir à M. Moivre.

Weiter in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 12. 11. 1707 (n. S.):

Je compte que si par malheur ma lettre pour M. Moivre avoit été perdue, vous aurez la bonté de l'asseurer qu'elle contenoit mon remerciment de son livre.

Schließlich in DE MOIVRE an JOHANN I BERNOULLI vom 2. 12. 1707 (a. S.): *M. Varignon qui m'a écrit depuis peu une lettre fort honnête au sujet de ma dispute avec Cheynes ...*

2. DE MOIVRE an VARIGNON, März 1714

belegt in DE MOIVRE an JOHANN I BERNOULLI vom 28. 6. 1714 (a. S.): *Comme j'écrivis a M. Varignon dans ce temps là*[88] ...

3. DE MOIVRE an VARIGNON, Juni 1714

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 16. 7. 1714 (n. S.):

> *Voici une lettre de M. Moivre, que je reçu hier pour vous. Il m'écrit que M. Newton est charmé de la solution de votre Problème, mais qu'il ne convient pas que sa méprise soit venue de la source que M. votre Neveu en a indiquée; ce qu'un nommé M. Hire pretend voir. Il m'écrit aussi qu'il 'paroitra dans peu une reponse de ce M. Hire à quelques pièces volantes imprimées en Allemagne et en Hollande, par lesquelles on prétend asseurer à M. Leibniz l'invention du calcul différentiel*[89]'.

4. DE MOIVRE an VARIGNON am 2. 8. 1714 (a. S.)

5. VARIGNON an DE MOIVRE zwischen 20. und 25. 11. 1714 (n. S.)

beide Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 25. 11. 1714 (n. S.):

> *Entre plusieurs lettres que nos portiers me rendirent le 20. de ce mois en arrivant ici de la Campagne, il s'en trouva une du 2. Aoust V. S., par laquelle M. Moivre m'anonçoit que le Jeudy précédent j'avois aussi été reçu de la Société Royale d'Angleterre; j'ay lui repondu sur cela ...*

6. DE MOIVRE an VARIGNON, Dezember 1714/Januar 1715

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 22. 1. 1715 (n. S.):

> *Mr. le chevalier de Fleury, fils de M. l'Ambassadeur de Cicile en Angleterre, me rendit le 17 de ce mois un paquet de M. Moivre, dans lequel ... Mr. Moivre me charge de vous faire ses excuses de son long silence causé par une indisposition presque continuelle depuis quelques temps ...*

7. DE MOIVRE an VARIGNON am 20. 4. 1719 (a. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 11. 5. 1719 (n. S.) mit einem längeren Zitat aus MOIVRES Brief: *Car dans une lettre du 20. Avril, que je reçu de M. Moivre le 7. du présent mois de may il m'en asseure en ces termes ...*

8. VARIGNON an DE MOIVRE, Juli/August 1719

8a. DE MOIVRE an einen jungen Engländer, August 1719[90]

beide Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 6. 9. 1719 (n. S.), wobei der für VARIGNON bzw. JOHANN I BERNOULLI bestimmte Text aus dem Brief an den Engländer französisch wiedergegeben ist:

> *Il y a environ un mois ou cinq semaines que j'envoyay votre lettre à M. Newton avec une que je lui écrivois ... Au paquet de ces deux lettres j'en joigni une pour M. de Moivre dans laquelle je lui fesois force complimens de votre part et ...*

---

[88] Gemeint ist die Zeit der Aufnahme von NIKOLAUS I BERNOULLI in die ROYAL SOCIETY, nämlich der 11. 3. 1714 (a. S.).

[89] Im Original ist diese Stelle durch das damals übliche Unterstreichen als wörtliches Zitat gekennzeichnet.

[90] Name konnte nicht festgestellt werden.

In einem P. S. zu diesem Brief steht:

Je romps l'envelope cachetée de cette lettre que j'allois envoyer à la poste pour vous dire une agréable nouvelle que vient de m'anoncer un jeune gentilhomme Anglois de la part de M. de Moivre, de qui il a reçu une lettre dans laquelle est en Anglois par raport à vous, ce que voici en françois qu'il m'a dicté sur elle.

9. DE MOIVRE an VARIGNON am 3. 10. 1719 (a. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 14. 11. 1719 (n. S.) mit einem längeren Zitat aus dem MOIVRE-Brief:

Entre plusieurs lettres que nos Portiers me rendirent en arrivant, en voici deux en un paquet pour vous une de M. Newton et l'autre de M. Moivre; qui m'ont aussi écrit l'un et l'autre ... M. de Moivre dans lettre du 3. Octob. 1719 m'assure de touttes ces dispositions de M. Newton ...

VARIGNON behauptet hier, einen Brief DE MOIVRES an JOHANN I BERNOULLI erhalten zu haben. JOHANN I BERNOULLI schreibt jedoch im Brief an VARIGNON vom 21. 12. 1719 (n. S.), daß in der Sendung kein Brief DE MOIVRES enthalten war, und vermutet einen Irrtum VARIGNONS.

10. VARIGNON an DE MOIVRE am 2. 1. 1720 (n. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 11. 1. 1720 (n. S.): *Le 30. decembre dernier je reçu votre lettre du 21. et le 2. janvier de cette année-ci j'envoyay à M. Moivre celle qu'elle contenoit pour Newton après l'avoir cachetée.*

In einem Brief

10a. DE MOIVRE an den (schon erwähnten) jungen Engländer, Februar 1720

ist eine Passage für VARIGNON und JOHANN I BERNOULLI enthalten. Diese ist französisch wiedergegeben in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 8. 3. 1720 (n. S.):

Le jeune gentil homme Anglois dont je vous ay desja parlé, m'apporta il y a quelques jours une lettre qu'il venoit de recevoir de M. de Moivre, pour m'en faire lire un endroit qui y étoit en François pour vous et pour moy en voici la copie.

11. DE MOIVRE an VARIGNON, Juni 1720

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 6. 7. 1720 (n. S.): *Il y a desja quelques jours que j'ay reçu une lettre de M. de Moivre, ou il me fait une confidence ...*

12. VARIGNON an DE MOIVRE, Juli 1720

13. DE MOIVRE an VARIGNON am 25. 7. 1720 (a. S.)

Beide Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 20. 9. 1720 (n. S.) mit einem Zitat aus dem MOIVRE-Brief vom 25. 7. 1720 (a. S.):

C'est ainsi que j'en parlay dernierment à M. Taylor en presence de M. l'Abbé Conti[91], *et que je l'avois desja écrit à M. de Moivre qui est toujours fort de vos Amis ... C'est sans doute d'eux que M. de Moivre m'a dit sur la fin d'une lettre du 25. Juillet, reçue le 10. Aoust dernier, qu'il m'écrivoit par raport à la nouvelle édition, qui se doit faire ici de l'optique françoise de M. Newton.*

14. DE MOIVRE an VARIGNON am 15. 9. 1720 (a. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 1. 10. 1720 (n. S.), wobei ein großer Abschnitt aus dem MOIVRE-Brief wörtlich wiedergegeben ist: ... *et que je*

[91] CONTI, ANTONIO SCHINELLA (1677—1749).

viens d'en reçevoir une de M. de Moivre en date du 15. Septembre dernier, dans laquelle il y a des choses qui vous regardent ...

15. VARIGNON an DE MOIVRE, September/Oktober(?) 1720

16. DE MOIVRE an VARIGNON, Oktober/November(?) 1720

17. DE MOIVRE an VARIGNON, Anfang Dezember 1720

18. VARIGNON an DE MOIVRE, Dezember 1720

Alle vier Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 19. 1. 1721 (n. S.):

> *Aussi suis-je présentement très faché d'avoir écrit de votre part (suivant votre ordre) à M. de Moivre de la demander pour vous. Il ne m'a point encore repondu; mais ...* Im selben Brief in einem P. S.: *Sur cela je priay M. de Moivre de nous faire prêter cet original: il me repondit que l'ayant demandé pour cela à M. Newton, en lui disant que je souhaitois fort d'avoir son portrait, M. Newton lui avoit dit qu'il vouloit me le donner, et que n'ayant plus d'original donné à Milord ... il se feroit peindre exprès pour moy. Quelque temp après M. de Moivre m'écrivit que j'aurois ce portrait dans peu et que M. Newton vouloit aussi le mien.*

19. DE MOIVRE an VARIGNON am 5. 1. 1721 (a. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 16. 2. 1721 (n. S.) mit zwei langen Passagen aus dem MOIVRE-Brief: *Voici ce que M. de Moivre m'en dit dans sa lettre qui est du 5. Janvier 1721.*

20. VARIGNON an DE MOIVRE, März 1721

21. DE MOIVRE an VARIGNON am 8. 5. 1721 (a. S.)

Beide Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 20. 6. 1721 (n. S.):

> *Pour y satisfaire, je commence par la première du 20. Fevrier*[92]*. J'ay écrit à M. de Moivre ce que vous m'y marquiez de votre amour pour la paix et ... Sur cela M. de Moivre dans sa lettre du 8. May dernier m'asseure aussi de l'amour pour la paix qu'a pareillement M. Newton, on me disant, que ... Cependant puisque vous le voulez, je vas encore écrire a M. de Moivre, que vous ne ... Voilà les paroles de votre première lettre, que je vas transcrire à M. de Moivre pour en informer M. Newton, sans lui rien dire des menaces qui sont dans votre seconde ...*

Im letzten Abschnitt wird also ein Brief VARIGNONS an DE MOIVRE versprochen.

22. VARIGNON an DE MOIVRE am 24. 7. 1721 (n. S.)

belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 9. 8. 1721 (n. S.) und in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 21./22. 10. 1721 (n. S.).

23. DE MOIVRE an VARIGNON am 19. 8. 1721 (a. S.)

24. DE MOIVRE an VARIGNON am 16. 9. 1721 (a. S.)

Beide Briefe belegt in VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI vom 21./22. 10. 1721 (n. S.), wobei ein Teil des MOIVRE-Briefes vom 19. 8. 1721 (a. S.) wörtlich wiedergegeben ist.

Brief vom 21./22. 10. 1721:

> *... que vous m'aviez chargé de faire scavoir à M. de Moivre pour les lui représenter; ce que j'avois fait le 24. Juillet ainsi que je vous l'avois promis, et en vos propres termes pour lui en exprimer toutte la force. Le 19. Aoust M. de Moivre me repondit à cela ... Je ne vous ay point fait scavoir cette Reponse de M. de Moivre attendent toujours celle qu'il m'y promettoit de M. Newton pour vous la faire scavoir comme la*

[92] JOHANN I BERNOULLI an VARIGNON, 20. 2. 1721 (a. S.).

capitale que vous demandez. M. de Moivre me fist encore espérer cette reponse de M. Newton par raport à vous dans une lettre du 16. Septembre, que je reçu le 7. de ce mois-ci, dans laquelle il me disoit que 'la Mort de M. Keill, arrivée depuis quinze jours, leve un grand obstacle à la paix' [89].

25. Varignon an de Moivre, Anfang Dezember 1721

belegt in Varignon an Johann I Bernoulli vom 31. 1. 1722 (n. S.)

26. Varignon an de Moivre, einige Tage nach dem vorhergehenden Brief

belegt in Varignon an Johann I Bernoulli vom 4. 2. 1722 (n. S.)

27. de Moivre an Varignon am 28. 12. 1721 (a. S.)

belegt in Varignon an Johann I Bernoulli vom 31. 1. 1722 (n. S.) mit einem längeren Zitat aus dem Moivre-Brief

28. de Moivre an Varignon, Mitte Januar 1722

belegt in Varignon an Johann I Bernoulli vom 4. 2. 1722 (n. S.)

Brief Varignons an Johann I Bernoulli vom 31. 1. 1722 (n. S.):

Votre dernière lettre du 22. Novembre dernier, m'embarassa fort en me demandant de prier encore M. de Moivre d'engager ... N'osant donc absolument lui en parler, j'ay encore eu recours pour cela à M. de Moivre, non obstant sa déclaration de ne plus se mêler de cette affaire: je l'ay prié instamment de vouloir bien faire encore cette dernière tentative ... et voici ce qu'il m'en écrit dans une lettre datée du 28. Decembre 1721 que je reçu de lui il y a 10 ou 12 jours.

Brief Varignons an Johann I Bernoulli vom 4. 2. 1722 (n. S.):

... qu'il n'avoit point encore alors reçu celle où je lui avois envoyé copie de tout ce que la votre du 22. Novembre dernier contenoit de raison pour le demander, et qu'il n'avoit taché de l'obtenir que sur ce que je lui en répétay dans une lettre que j'eu occasion de lui écrire peu de jours après par raport au Libraire de M. Newton, dans laquelle je lui renouvelois l'instante prière que je lui avois faite dans cette lettre là ... J'en reçu hier encore une de M. Moivre sur le même sujet ...

29. de Moivre an Varignon am 25. 4. 1722 (a. S.)

30. de Moivre an Varignon am 17. 5. 1722 (a. S.)

Beide Briefe belegt in Varignon an Johann I Bernoulli vom 4. 6. 1722 (n. S.): *Cela a trainé en cet état jusqu'au 25. Avril dernier que M. de Moivre m'écrivit ... Mais j'en reçu une nouvelle de M. de Moivre il y a deux jours, datée du 17. May, dans laquelle il me dit que M. Newton ...* Der Brief von Varignon an Johann I Bernoulli vom 4. 6. 1722 (n. S.) ist der letzte, der einen Hinweis auf den Briefwechsel mit de Moivre enthält. Am 22. 12. 1722 starb Varignon.

Dem vorliegenden Material nach war Varignon der Korrespondent, mit dem de Moivre die meisten Briefe wechselte. Über den wissenschaftlichen Inhalt dieses Briefwechsels läßt sich fast nichts sagen, da Varignon zwar z.T. sehr lange Passagen der Moivre-Briefe zitiert, aber eben nur die Johann I Bernoulli interessierenden Vorgänge in England. Auch Maty betont nur den freundschaftlichen Charakter der Korrespondenz. Immerhin könnten die gemeinsamen Korrekturen der französischen Ausgabe von Newtons Optik zu einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung geführt haben. All diese Fragen bleiben ungeklärt, solange der Verbleib der Briefe nicht bekannt ist[93].

[93] Auch bei den Oratorianern in Paris — Varignon war Oratorianer — wurde nichts gefunden, wie mir Père Costabel versicherte.

Nach der Darstellung des Gesamtbriefwechsels de Moivres und damit auch der Quellen ergibt sich die im folgenden Abschnitt zu schildernde Lebensentwicklung de Moivres.

3. Das Leben Abraham de Moivres

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Überblick über das Leben de Moivres und besonders sein Schaffen in England gegeben werden. Dabei wird, soweit möglich, die persönliche Entwicklung und die Entstehungszeit seiner wichtigsten Arbeiten berücksichtigt. In 2.1. wurde bereits gezeigt, daß praktisch alle bisher verwendeten biographischen Nachrichten über Moivre auf Matthew Maty bzw. dessen *Mémoire* zurückgehen. Die *Mémoire* ist vor allem wichtig für den ersten Lebensabschnitt, die von Moivre selbst geschilderte Jugend in Frankreich. Über den Wissenschaftler in England informieren hauptsächlich das publizierte Werk und die Briefe. Der Aussagegehalt der zahlreichen anekdotischen Schilderungen in der *Mémoire* — viele berühren das Verhältnis Moivres zu Newton — muß kritisch überprüft werden. Ich habe versucht, durch Hinzunahme von Gegendarstellungen und bisher nicht oder weniger beachteten Stellen von Moivre selbst das vom Freund Maty entworfene Bild Moivres etwas zu objektivieren.

Abraham Moivre kam am 26. Mai 1667 (n. S.) als Sohn eines protestantischen Arztes in der Stadt Vitry[94] in der Champagne zur Welt. Vom sechsten bis zum zwölften Lebensjahr wurde er in der von den *Pères de la doctrine Chrétienne* geleiteten katholischen Schule unterrichtet. 1678 schickte ihn sein Vater nach Sedan, wo Moivre zunächst Griechisch studierte und mehr oder weniger heimlich das elementare Rechnen lernte[95]. Der immer stärker werdende Druck gegen die durch das *Edikt von Nantes*[96] formal noch geschützten und gleichberechtigten Protestanten führte zur Schließung der protestantischen Ober- und Hochschule in Sedan 1681.

Von 1682 bis 1684 widmete sich Moivre in Saumur dem Studium der Logik und beschäftigte sich nebenbei weiter mit Mathematik. Damals schon las er unter anderem Huygens' Tractat *De Ratiociniis in Ludo Aleae*[97], war allerdings, wie Moivre selbst betont, weit davon entfernt, die Arbeit vollkommen zu verstehen. 1684 hörte er, unzufrieden mit seinem Professor in Saumur, der sich weigerte, von Descartes auch nur Notiz zu nehmen, in Paris eine Physikvorlesung am *Collège d'Harcourt*. Nach einer längeren Reise in die Bourgogne, während der er die ersten sechs Bücher von Euklid zu verstehen suchte, zog er zu seinen inzwischen nach Paris übergesiedelten Eltern und studierte dort als Privatschüler von Jacques Ozanam (1640—1717) Mathematik. Vorher schon hatte Moivre die *Elémens de mathématiques* des Jean Prestet[98], eine *Géometrie pratique* von Henrion[99] und die *Oeuvres mathématiques posthumes*[100] des Jacques Rohault durchgearbeitet.

[94] *Vitry-le-François* an der *Marne*.

[95] Es heißt, er las ein Arithmetiklehrbuch von Le Gendre, wahrscheinlich die erstmalig Paris 1657 erschienene *L'Arithmétique en sa perfection*.

[96] 1598.

[97] Siehe Fußnote 22.

[98] Ausgabe Paris 1675.

[99] Denis Henrion gest. 1640.

[100] Ediert 1682.

1685 erließ Ludwig xiv. das *Revokationsedikt von Fontainebleau*, das die Aufhebung des *Edikts von Nantes* beinhaltete und jede Ausübung des reformierten Bekenntnisses verbot. Hunderttausende von Hugenotten flohen in protestantische Länder.

Der junge Moivre wurde in der *Prieuré de Saint-Martin* festgehalten, wo man vergeblich versuchte, ihn zum Übertritt in die katholische Kirche zu bewegen. Erst am 27. April 1688 (n. S.)[101] wurde er freigelassen. Es gelang ihm nach England zu kommen. Hier begann der mittellose Flüchtling seinen Lebensunterhalt durch Privatunterricht in Mathematik zu verdienen. Mutmaßlich haben Franzosen, die schon in London Fuß gefaßt hatten, dem Neuankömmling unter die Arme gegriffen und ihm die Verbindung zu der Gesellschaft, aus der sich seine Schüler rekrutierten, geschaffen. Er nannte sich von nun an de Moivre, vielleicht um sich damit, zumindest vom Namen her, auf dasselbe gesellschaftliche Niveau wie seine adligen Schüler zu stellen.

Er machte sich vor allem die Newtonschen Ergebnisse, soweit er sie aus den 1687 erstmals erschienenen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* entnehmen konnte, zu eigen[102]. In den ersten Jahren arbeitete sich de Moivre von dem Wissensstand seiner bei Descartes stehengebliebenen französischen Lehrer vor bis zum Verständnis der im Anschluß an die Newtonschen Methoden entstehenden Probleme. 1692 machte de Moivre die Bekanntschaft Halleys und bald darauf Newtons. In dieser Zeit kam auch Nicolas Fatio de Duillier (1664—1753) auf Empfehlung de Magnevilles für einen Monat als Schüler zu de Moivre und äußerte sich befriedigt über den Unterrichtserfolg[103]. Die Jahre von 1692 bis 1695 sind vom Wandel des Lernenden zum Forschenden gekennzeichnet.

1695 erschien auf Halleys Vermittlung[104] die erste in den *PT* publizierte Arbeit de Moivres, die eine zusammenfassende Darstellung der Fluxionsmethode Newtons und deren Anwendungsbereich bietet[105]. Im selben Jahr noch fand de Moivre zu seiner ersten eigenständigen Leistung, nämlich einer dem Newtonschen Binomialtheorem entsprechenden und es umfassenden Formel für Polynome und (formale) Potenzreihen bei rationalen Exponenten; d.h. de Moivre fand das Bildungsgesetz für die Koeffizienten der aus einem (einer) mit einer rationalen Zahl potenzierten Polynom (Potenzreihe) resultierenden Reihe. Dieses Ergebnis verwendete er zusammen mit dem Ansatz in unbestimmten Koeffizienten, um z als Potenzreihe in y aus der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu y^\mu \quad [106]$$

zu bestimmen.

---

[101] Haag a.a.O., S. 433.

[102] Dieser erste Lebensabschnitt de Moivres findet sich in der *Mémoire* S. 1—7.

[103] *Mémoire* S. 8.

[104] *Mémoire* S. 10.

[105] *PT* Nr. 216, 1695, S. 52—57.

[106] Die Koeffizienten a_ν können dabei beliebige rationale, algebraische oder transzendente Funktionen von y sein.

Diese Arbeiten erschienen 1697 und 1698 in den *PT*. Schon 1697 war DE MOIVRE Mitglied der *Royal Society* geworden.

1700 und 1702 erfolgten zwei kleinere Veröffentlichungen[107]. Die erste hat die Oberflächen- und Volumenbestimmung von speziellen Rotationskörpern — es werden Kegelschnittzweiecke (Möndchen) oder Teile davon um eine Achse rotiert — die andere die Reduktion unbestimmter Integrale von Funktionen der Form

$$x^{m\pm\frac{1}{2}}(d\pm x)^{\pm\frac{1}{2}};\quad x^m(r^2\pm x^2)^{\pm\frac{1}{2}};\quad x^m(d\pm x)^{-1};\quad x^m(r^2+x^2)^{-1}$$

durch partielle Integration zum Inhalt.

1703 brachte der schottische Arzt GEORGE CHEYNE eine Fluentenrechnung heraus[108]. Daß dieses Buch nicht nur in England mit Interesse erwartet wurde, ist klar. Für NEWTON, den CHEYNE an vielen Stellen überschwenglich lobt, war weniger enttäuschend, daß sich CHEYNE nicht von LEIBNIZ distanziert[109] oder ihn gar ignoriert, als die schwache Darstellung des gesamten Werks. Auch DE MOIVRES in den *PT* Nr. 230 veröffentlichtes Polynomialtheorem wird erwähnt. CHEYNE spricht aber DE MOIVRE jede Originalität ab, indem er DE MOIVRES Formel als aus dem NEWTONschen Binomialtheorem ableitbar hinstellt[110]. Ob diese einzige Bemerkung bezüglich DE MOIVRE der eigentliche Grund für MOIVRE war, ein ganzes Buch der Entgegnung zu schreiben, erscheint fraglich, auch wenn frühere Darstellungen durch diese eine negative Aussage CHEYNES die Reputation des Mathematikers DE MOIVRE und damit seine wirtschaftliche Existenz als Privatlehrer gefährdet sahen. Die Mitteilung des von einem Schotten informierten VARIGNON an JOHANN I BERNOULLI, daß NEWTON den Streit zwischen CHEYNE und DE MOIVRE inszeniert hatte, kann heute nicht mehr auf ihre Richtigkeit überprüft werden. DE MOIVRE dürfte nicht zuletzt die Möglichkeit, in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses der Mathematiker zu rücken, indem er durch die Korrektur CHEYNES und einige Ergänzungen das erwartete Buch über die neuen Methoden schuf, gereizt haben.

MOIVRE selbst erklärt im Vorwort zu den *Animadversiones:*

> *Rogatus a quibusdam (inter quos et nonnulli ex Autoris amicis extiterunt) quae mea esset de libro D. Cheynaei opinio; facile responsum dedi, me ab Autore in non paucis diversa sentire. Sed denuo rogatus ut mentem plenius aperirem, Philosophica libertate usus (nec erat cur quid dissimularem) errores quam plurimos libro inesse dixi. Haec quidam sententia varie apud varios accepta est; quidam erant qui haec gratis dicta esse, Autorique injuriam illatam querebantur: Non deerant alii qui nobis adstipulati, hortati sunt ut quid de hoc libro sentirem cum publico communicarem. Existimabant enim Tironibus praesertim usui fore, si intento quasi digito errores commonstrarem simul et emendarem. His igitur rationibus adductus Animadversiones sequentes edere constitui.*

Aus dem geplanten Werk wurde dann doch weniger ein Lehrbuch als eine scharfe Rezension der *Fluxionum Methodus inversa*. Sie wurde von CHEYNE, der bereits vor der Edition der *Animadversiones* noch einige, wie er andeutet, von CRAIG

---

[107] *PT* Nr. 265, 1700 und *PT* Nr. 278, 1702.
[108] Siehe Fußnote 34.
[109] Ebenda S. 46.
[110] Ebenda S. 57f.

und Johann I Bernoulli mitgeteilte Berichtigungen unter dem Titel *Addenda et Adnotanda, in Libro Fluxionum Georgii Cheynaei* veröffentlicht hatte, mit den sehr persönlichen, von Beleidigungen strotzenden *Rudimentorum Methodi Fluxionum Inversae Specimina* beantwortet[111]. Auf diese *Specimina* antwortete Moivre nicht mehr. Jedoch veranlaßte die Auseinandersetzung mit Cheyne de Moivre, mit Johann I Bernoulli Kontakt aufzunehmen. Der Anfang des ersten Briefes der Korrespondenz[112], der die *Animadversiones* begleitete, ist nicht erhalten. Aber der Antwortbrief Johann I Bernoullis macht de Moivres Motiv klar. Hier steht, daß sich Cheyne schon vor de Moivre um Johann I Bernoulli bemüht und ihm, wie schon früher sein eigenes Buch, die *Animadversiones* seines Gegners zur Korrektur geschickt hatte, um gegen de Moivre eine Handhabe zu erhalten[113].

Johann I Bernoullis Offenheit in diesem Brief beweist auch die Beurteilung der *Animadversiones*. Johann I Bernoulli meint, daß für den scharfen Ton de Moivres eher ein anderer, besonderer Grund verantwortlich sei als de Moivres im Vorwort stark betonte Wahrheitsliebe. Er wirft ihm vor, richtige Stellen in Cheynes Traktat angegriffen und offensichtliche Fehler übersehen zu haben. Auch Leibniz äußerte sich Johann I Bernoulli gegenüber über Cheynes und de Moivres Arbeiten. Leibniz' vernichtendes Urteil über Cheynes Buch schließt mit dem Rat, Cheyne möge sich lieber mit Medizin beschäftigen[114], während de Moivres erstes Buch bei Leibniz den Wunsch auslöst, de Moivre, dessen Talent nicht zu verachten sei, sollte jetzt etwas für den Fortschritt der Wissenschaft tun[115]. Die *Animadversiones* enthalten wirklich nichts wesentlich Neues; sie dokumentieren lediglich die damaligen Schwierigkeiten mit der Infinitesimalrechnung.

Ich habe den Streit mit Cheyne, der de Moivre, wie die Briefe an Johann I Bernoulli zeigen, bis 1708 immer wieder beschäftigt, deshalb ausführlicher geschildert, weil er mir für die weitere Entwicklung de Moivres mit entscheidend zu sein schien.

Die Korrespondenz de Moivres mit Johann I Bernoulli war eine Folge dieses Streits. Die *Animadversiones* hatten nicht den gewünschten Erfolg gebracht; die fachlichen Diskussionen mit Johann I Bernoulli machten de Moivre die Überlegenheit des Baslers klar. So ist es nur verständlich, daß de Moivre nach neuen Zielen für seine Forschungen suchte. 1705 fand de Moivre im Anschluß an Newtons *Principia* einen Satz über Zentripetalkräfte[116]. Zur selben Zeit be-

---

[111] *Rudimentorum Methodi Fluxionum Inversae Specimina: Quae Responsionem continent Ad Animadversiones Ab. de Moivre in Librum G. Cheynaei, M.D. S.R.S.*, London 1705.

[112] Brief vom 22. 4. 1704 (a.S.); Wollenschläger a.a.O., S. 178f.

[113] Johann I Bernoulli an de Moivre vom 15. 11. 1704 (n.S.); Wollenschläger a.a.O., S. 182.

[114] Leibniz an Johann I Bernoulli, 2. 10. 1703 (n.S.), in *Commercium Philosophicum et Mathematicum* II, S. 95.

[115] Leibniz an Johann I Bernoulli, 14. 7. 1705 (n.S.), in *Commercium Philosophicum et Mathematicum* II, S. 130.

[116] Siehe Brief de Moivre an Johann I Bernoulli vom 27. 7. 1705 (a.S.); Wollenschläger a.a.O., S. 213 und *MA* S. 230.

schäftigte er sich auch mit Funktionen in bipolaren Koordinaten[117]. Im Zusammenhang damit stehen Ergebnisse über die Brennpunkteigenschaften von Kegelschnitten. Auf Anregung HALLEYs hin löste DE MOIVRE einige Extremalprobleme der mathematischen Astronomie[118].

1706 hatte DE MOIVRE auf Anraten DE MAGNEVILLEs versucht, direkt mit LEIBNIZ in Kontakt zu kommen. MOIVRE bot sich NEWTON und HALLEY als Übermittler der letzten Publikationen der beiden[119] an und fand so Gelegenheit, sich bei LEIBNIZ einzuführen und ihm seine Dienste anzubieten[120]. LEIBNIZ möchte DE MOIVRE in seiner Antwort vom 24. 6. 1706 (n. S.) für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Reihen interessieren[121] und würde sich freuen, ab und zu durch DE MOIVRE über Neuigkeiten in England unterrichtet zu werden. Anscheinend hat DE MOIVRE, der mutmaßlich diese Anregung von LEIBNIZ nicht verstand, diesen Brief LEIBNIZ' nicht beantwortet.

DE MOIVRE war über den Einfluß LEIBNIZ' bei der Vergabe von Professuren in Deutschland und den Niederlanden informiert und wandte sich in Briefen von 1707 und 1708 an JOHANN I BERNOULLI mit der Bitte, er möge sich für ihn bei LEIBNIZ verwenden. Im Brief vom 2. 12. 1707 (a. S.) schildert DE MOIVRE sein Privatlehrerdasein in London, das ihm kaum Zeit zu eigenen Forschungen lasse, um dann im nächsten Brief vom 6. 7. 1708 (a. S.) einen Überblick über seine letzten Arbeiten zu geben. Dieser Brief, der die fachliche Qualifikation DE MOIVREs unterstreichen sollte, ist mit der interessanteste der Korrespondenz mit JOHANN I BERNOULLI.

Zu Beginn des Jahres 1707 fand DE MOIVRE die Auflösung der sogenannten *Cardanischen Gleichungen*; darin ist auch die Umkehrung der Teilungsgleichung für den Sinus enthalten[122]. Dieses Ergebnis publizierte er noch im selben Jahr in den *PT* ohne Beweis. Im Brief an JOHANN I BERNOULLI vom 6. 7. 1708 (a. S.) zeigt DE MOIVRE im Fall der Teilungsgleichung, daß er seine Formeln mit Hilfe von Fluxionen ebenso wie durch Extrapolation ableiten kann. DE MOIVRE benutzt als Beispiel, tg nx als Funktion von tg x darzustellen, und weist JOHANN I BERNOULLI darauf hin, daß die verwendete Methode auch auf die anderen trigonometrischen Funktionen anwendbar sei. DE MOIVRE hatte sich damals auch mit

---

[117] Brief MOIVRE an JOHANN I BERNOULLI vom 25. 4. 1706 (a. S.); WOLLENSCHLÄGER a. a. O., S. 229f.

[118] Ein Teil dieser Ergebnisse wurde in den *PT* Nr. 352, 1717 und Nr. 360, 1719 veröffentlicht; eine Zusammenfassung der zuletzt genannten Arbeiten stellt das achte Buch der 1730 veröffentlichten *MA* dar. Dieses achte Buch ist betitelt: *De Viribus Centripetis, itemque de maximis et minimis mutationibus quae in motu Corporum Coelestium occurrunt, Disquisitio Geometrica.*

[119] Die von SAMUEL CLARKE 1706 besorgte lateinische Übersetzung der Optik NEWTONs und HALLEYs, *Apollonius Pergaeus sectione rationis libri duo, ex arabico manuscripto latine versi*, ebenfalls 1706.

[120] DE MOIVRE an LEIBNIZ 10. 4. 1706 (a. S.).

[121] LEIBNIZ hat seine Vorstellungen über Reihenkonvergenz im Brief an JAKOB HERMANN vom 26. 6. 1705 (n. S.) (in C. I. GERHARDT, *Leibnizens Mathematische Schriften* IV, S. 272) und später im Brief an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 28. 6. 1713 (n. S.) (in GERHARDT, *Leibnizens Mathematische Schriften* III, S. 985) sehr viel klarer formuliert.

[122] In den *PT* Nr. 240, 1698, hatte DE MOIVRE die von NEWTON gefundene Teilungsgleichung für den Sinus bewiesen.

Extra- und Interpolationsproblemen beschäftigt und war selbständig zu der von Nikolaus Mercator (1620—1687) schon 1668 in der *Logarithmotechnia* veröffentlichten Extrapolationsformel gedrungen. De Moivre verallgemeinerte diese Formel, ohne einen Beweis oder auch nur die Zulässigkeit dieser Verallgemeinerung anzudeuten, zu einer Interpolationsformel. Zusätzlich kam er auf den Gedanken, die Anzahl der Stützpunkte unendlich groß zu machen, und erreichte damit eine Vorstufe zur Taylor-Reihe. Freilich sind allgemeinere Interpolationsformeln bei Newton, die Taylor-Reihe bei James Gregory[123] und unabhängig davon bei Johann I Bernoulli[124] schon wesentlich früher vorhanden; de Moivre erfuhr auch durch Halley, daß diese seine selbständig gefundenen Ergebnisse nicht gerade neu waren. Abgeschlossen wird der Brief durch zwei von Halley gestellte astronomische Probleme, wobei de Moivre nur die Lösung des ersten, das Maximum der Veränderung der Sonnenhöhe in der Zeit zu bestimmen, gibt. De Moivre hatte gehofft, daß gerade dieses letzte astronomische Problem einer Veröffentlichung in den *AE* für würdig befunden würde, aber Johann I Bernoulli, der sich fast zwei Jahre Zeit ließ, diesen Brief zu beantworten, fand gerade diese Arbeit nicht passend, meinte jedoch, de Moivre hätte sicher genügend andere publikationsreife Ergebnisse[125].

Immerhin hatte Johann I Bernoulli de Moivre in Briefen an Leibniz[126] nachdrücklich empfohlen. Leibniz ließ sich nur einmal im Brief vom 6. 9. 1709 (n. S.) vernehmen: *Diu est quod de Moivraeo quoque nihil intellexi.*[127] De Moivres Bemühungen um eine Professur auf dem Festland waren gescheitert.

1708 hatte Montmort ein Buch über Wahrscheinlichkeitsprobleme, den *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, herausgebracht. Über fünfzig Jahre waren seit dem Druck von Huygens' *De Ratiociniis in Aleae Ludo* vergangen. In dieser langen Zeit war nichts veröffentlich worden, was wesentlich über Huygens hinausging. Montmort hatte seine gründliche Literaturkenntnis, die sich auch auf die 1705 in den Abhandlungen der Pariser Akademie und 1706 im *Journal des Sçavans* erschienenen Auszüge aus der *Ars Conjectandi*[128] des 1705 verstorbenen Jakob Bernoulli bezog, und seine darauf fußenden eigenen Forschungen in das Buch gesteckt, das gegenüber Huygens, der sämtliche Aufgaben mit einer einzigen Methode löste, eine bedeutende Erweiterung des lösbaren Aufgabenbereichs brachte. De Moivre, der die Huygenssche Schrift schon 1684 kennengelernt hatte, schrieb nach Durchsicht von Montmorts Werk etwa 1710 eine sehr knappe Zusammenfassung seiner auf Montmort aufbauenden Ergebnisse. Diese Arbeit erschien 1711 als ein ganzes Vierteljahresheft der *PT*[129] unter dem Titel *De*

---

[123] Siehe H. W. Turnbull, *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, London 1939.

[124] Siehe Briefwechsel Johann I Bernoulli mit Leibniz 1694/95, und J. O. Fleckenstein, *Die Taylorsche Formel bei Johann I Bernoulli*, Elemente der Mathematik 1, 1946, S. 13—17.

[125] Brief vom 9. 4. 1710 (n. S.).

[126] Mai 1708 und 26. 4. 1710 (n. S.), die entsprechenden Stellen finden sich im *Commercium Philosophicum et Mathematicum* a. a. O. II, S. 182 bzw. S. 222.

[127] *Commercium Philosophicum et Mathematicum* a. a. O. II, S. 219.

[128] Erst 1713 von den Gebrüdern Thurneisen und Nikolaus I Bernoulli herausgegeben.

[129] Nr. 329 für die Monate Januar bis März.

Mensura Sortis Seu, De Probabilitate Eventuum a Casu Fortuito Pendentibus. DE MOIVRE stellt die Entstehung der *Mensura Sortis* im Brief an JOHANN I BERNOULLI vom 18. 10. 1712 (a. S.) so dar:

FRANCIS ROBARTES (1650?—1718), späterer EARL OF RADNOR, hatte DE MOIVRE nach der Lektüre von MONTMORTs Wahrscheinlichkeitsrechnung einige Aufgaben vorgelegt, die mit den vom Autor angegebenen Mitteln nicht lösbar schienen. DE MOIVRE bewältigte diese Probleme, und ROBARTES ermunterte ihn, sich weiter mit dem Gegenstand zu befassen. Während eines Landaufenthaltes schrieb DE MOIVRE eine Zusammenfassung dieser seiner Forschungen, die dann auf Grund einer Eloge von ROBARTES in den *PT* erschienen. Diese Darstellung DE MOIVRES wird etwas modifiziert durch den Bericht von WILLIAM JONES[130] an ROGER COTES (1682—1716)[131]:

> *We have nothing considerable in hand here at present, only Mr. de Moivre's Treatise of Chance, which makes a whole Transaction, he is very fond of it, and we may expect it well done.*

DE MOIVRE hat die *Mensura Sortis* nicht ohne jede Absicht FRANCIS ROBARTES gewidmet. 1710 war WILLIAM WHISTON (1667—1752) wegen Neo-Arianismus die LUKASische Professur in Cambridge entzogen worden. DE MOIVRE hoffte bei der Neubesetzung des Lehrstuhls berücksichtigt zu werden. Daß FRANCIS ROBARTES bei der Vergabe eine entscheidende Rolle spielte, ist in der den *Elements of Algebra* vorausgehenden, von JOHN COLSON verfaßten Biographie NICHOLAS SAUNDERSONs, der die Professur dann wirklich erhielt und bis zu seinem Tod 1739 innehatte, ausdrücklich bezeugt. Hier steht auch, daß sich NEWTON, der Vorgänger WHISTONs, für SAUNDERSON eingesetzt hatte[132]. Bei der Abstimmung war der einzige Gegenkandidat von SAUNDERSON ein Mr. HUSSEY[133]; d.h., daß DE MOIVRE nicht in die engere Wahl gekommen war. Erstaunlich ist, daß sich offenbar keiner von DE MOIVRES Freunden für ihn eingesetzt hat. Neben der französischen Herkunft, die wahrscheinlich ein Hindernis bildete, bietet die *Penny Cyclopaedia* eine weitere Erklärung[134]:

> *He also, though he was not the first who adopted that plan, read lectures on natural philosophy: but it does not appear that his attempts in this way were very successful, he being neither fluent in the use of the English language, nor a good experimental manipulator.*

MATY meint in seiner *Mémoire*[135]:

> *Mais il étoit étranger, et pour tout dire il n'avoit pas assez su captiver la faveur des Grands, pour obtenir qu'on oubliât sa naissance et qu'on pesât son mérite.*

Ich habe hier die Begleitumstände der Entstehung der *Mensura Sortis* geschildert und möchte noch kurz auf das Werk selbst eingehen. DE MOIVRE hat in

---

[130] Über WILLIAM JONES siehe Abschnitt 2.3.2.

[131] Siehe Brief vom 17. 9. 1711 (a. S.), in J. EDLESTON, *Newtons Correspondence with Cotes*, S. 208 und *Memoirs of the Life, Writings and Correspondence of Sir William Jones*, hrsg. von Lord TEIGNMOUTH, London 1815, S. 10f.

[132] *Elements of Algebra* I, S. VII.

[133] Siehe EDLESTON a.a.O., S. 214; EDLESTON beruft sich auf *Rud's Diary*.

[134] VIII, London 1837, S. 380f.

[135] Ebenda S. 39.

der *Mensura Sortis* bereits die Lösungen von Spezialfällen des Problems der Spieldauer gegeben, das MONTMORT erst in der zweiten Auflage seines *Essay* behandelt. Bei der Beschäftigung mit diesem Problem stieß DE MOIVRE auf die von EULER später so genannten reziproken Gleichungen. Ein Polynom in einer Variablen, dessen jeweils vom ersten und letzten Glied gleich weit entfernte Glieder gleiche Koeffizienten aufweisen, wird gleich Null gesetzt. DE MOIVRE hat zwar die reziproken Gleichungen erst in den *MA*[136] behandelt[137], seine Ergebnisse aber bereits in der *Mensura Sortis* verwendet. Schon in diesem Buch zeigt sich der für DE MOIVRE in seinen Lehrbüchern typische Aufbau bei der Behandlung eines Problems. Zuerst wird ein Spezialfall gelöst und u. U. die Lösung bewiesen; erst dann folgt das allgemeine Problem, wobei DE MOIVRE den sehr oft analogen Beweis vollständig wiederholt. Diese etwas ermüdende Darstellung erklärt sich wahrscheinlich aus DE MOIVRES Unterrichtspraxis.

Der Versuch DE MOIVRES, sich in der Widmung an FRANCIS ROBARTES von MONTMORT abzuheben, indem er MONTMORT mangelnde Einfachheit und Allgemeinheit vorwarf, ärgerte MONTMORT verständlicherweise nachhaltig. DE MOIVRE, der durch NIKOLAUS I BERNOULLI bereits 1712[138] über MONTMORTS Reaktion unterrichtet war, schrieb erst an MONTMORT, als dieser seine Entgegnung im *Avertissement*[139] zur zweiten Auflage des *Essay* veröffentlicht und den *Essay* mit einem Begleitschreiben 1714[140] an DE MOIVRE geschickt hatte. Die weitere Entwicklung der Beziehungen zwischen MONTMORT und DE MOIVRE habe ich bereits in 2.3.3. vorweggenommen. Zu ergänzen ist, daß MONTMORT den Vorwurf der Abhängigkeit DE MOIVRES von seinem Werk nie aufgab, ja nach Erhalt der *Doctrine* DE MOIVRES etwa den BERNOULLIS gegenüber behauptete, DE MOIVRES Buch sei eine Abschrift des *Essay*. DE MOIVRE nun beschäftigten diese Beschuldigungen, an die FONTENELLE in seiner *Eloge* auf MONTMORT[141] erinnerte, ohne ihre Berechtigung zu diskutieren, so stark, daß er ihrer Zurückweisung elf Jahre nach MONTMORTS Tod in den *MA* ein ganzes Buch einräumte[142].

Nach diesem Vorgriff möchte ich ins Jahr 1712 zurückgehen. Zu dieser Zeit hatte der Prioritätstreit zwischen LEIBNIZ und NEWTON, dessen Partei durch den aggressiven Schotten JOHN KEILL[143] vertreten wurde, seinen Höhepunkt erreicht. Der aus der Behauptung KEILLS, LEIBNIZ habe die NEWTONsche Methode übernommen und lediglich mit anderen Symbolen versehen, und der Gegendarstellung LEIBNIZ' erwachsende offene Streit wurde von englischer Seite 1712 durch eine Kommission behandelt, die von zunächst sechs Mitgliedern auf insgesamt elf

[136] Ebenda S. 67—71.

[137] LEONHARD EULER (1707—1783) kommt in seiner am 2. 11. 1733 (n. S.) der Petersburger Akademie vorgelegten, aber erst 1738 veröffentlichten Arbeit *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio* bei der Behandlung der reziproken Gleichungen nicht über DE MOIVRES Ergebnisse hinaus.

[138] Im Brief NIKOLAUS I BERNOULLI an DE MOIVRE vom November 1712.

[139] In diesem *Avertissement* bietet MONTMORT einen für die Zeit ausgezeichneten Abriß über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis MOIVRE. MONTMORT hatte auch den Plan, eine Geschichte der Mathematik zu schreiben. Die Entwürfe dazu gingen nach seinem Tod 1719 verloren.

[140] Brief MONTMORT an DE MOIVRE, Februar 1714.

[141] *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* 1719, Paris 1721, S. 83—93.

[142] *MA* Buch 7, S. 146—229.

[143] 1671—1721, seit 1710 Professor für Astronomie in Oxford.

erweitert wurde. In diese Kommission wurde DE MOIVRE zusammen mit seinem Freund BROOK TAYLOR acht Tage vor Verlesung der Entscheidung aufgenommen. Diese Entscheidung richtete sich gegen LEIBNIZ. Mit seiner Wahl war DE MOIVRE in die auf das Urteil folgenden Auseinandersetzungen der beiden Gruppen um LEIBNIZ und NEWTON hineingezogen worden. Beide Parteien hatten in dem 1713 gegründeten *Journal Literaire*[144] (künftig abgekürzt *JL*) eine gegenüber den *PT* und den *AE* neutrale Zeitschrift gefunden. Nach den anonymen *Remarques*[145] von LEIBNIZ 1713, der Antwort KEILLS *aux Auteurs des Remarques*[146] und einer weiteren Veröffentlichung KEILLS im *JL* für das Jahr 1714[147] erschien im folgenden Jahr, wiederum von KEILL verantwortet, der *Extrait du Livre intitulé Commercium Epistolicum Collinii et aliorum* im *JL*[148]. DE MOIVRE hatte diesen Auszug ins Französische übersetzt. 1716 veröffentlichten die Herausgeber des *JL* die *Défense Du Chevalier Newton* durch JOHN KEILL gegen JOHANN I und NIKOLAUS I BERNOULLI[149]. Dieser Artikel wurde sehr wahrscheinlich ebenfalls durch DE MOIVRE übersetzt. KEILL stellte hier bei einem Satz über Zentripetalkräfte NEWTONS Priorität dem Inhalt nach und DE MOIVRES Priorität der Form nach gegenüber den BERNOULLIS fest[150]. JOHANN I BERNOULLI hatte sich nach den Angriffen auf NEWTON in der anonym verfaßten *Epistola Pro Eminente Mathematico* in den *AE* 1716 unter dem Pseudonym JO. HENR. CRUSIUS 1718 mit den Vorwürfen KEILLS in der *Défense* auseinandergesetzt[151]. Das *JL* brachte 1718 eine Entgegnung JAKOB HERMANNS auf die *Défense*[152] und 1719 einen Brief KEILLS an JOHANN I BERNOULLI[153], in dem KEILL JOHANN I BERNOULLI als den Autor der *Epistola*

[144] La Haye, 1713 bis 1737.

[145] *Remarques sur le différent* [*sic*] *entre M. de Leibnitz et M. Newton, JL 2,* 1713, S. 445—453.

[146] *Reponse de M. Keill, M. D. Professeur d'Astronomie Savilien, aux Auteurs des Remarques ... JL 4,* 1714, S. 319—358.

[147] *Démonstration de deux Théorèmes, qui peuvent servir à lever un grand nombre de difficultez dans la Phisique. Par M. Keill, Professeur ... JL 5,* 1714, S. 414—420.

[148] *Extrait du Livre intitulé Commercium Epistolicum Collinii et aliorum, de Analysi promota; publie par ordre de la Société Royale, à l'Occasion de la Dispute élevée entre M. Leibnitz et le Dr. Keill, sur le Droit d'invention à la Méthode des Fluxions, par quelques-uns appellée, Méthode Différentielle. JL 7,* 1715, S. 114—158 und S. 344—365. Dem *Extrait du Livre* geht voran ein *Extrait d'une Lettre de M. le Docteur Keill, Professeur ... JL 7,* 1715, S. 113.

[149] *Défense Du Chevalier Newton. Dans laquelle on repond aux Remarques de Messieurs Jean et Nicolas Bernoully insérées dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour les années 1710 et 1711. par Jean Keil, Professeur ... JL 8,* 1716, S. 418—433.

[150] MOIVRE hatte den Satz ohne Beweis im Brief vom 27. 7. 1705 (a. S.) JOHANN I BERNOULLI mitgeteilt und dabei bemerkt, daß NEWTON einen äquivalenten Satz bereits habe. KEILL ging es darum, durch die Feststellung der Priorität NEWTONS jeden Anspruch der BERNOULLIS (eventuell auch auf die Priorität DE MOIVRES) zurückzuweisen.

[151] *M. Jo. Henr. Crusii Responsio ad Cl. Viri Joannis Keil, Astronomiae Professoris Oxoniensis, Defensionem pro Nobilissimo Viro Is. Newtono in Diario Literario Hagiensi A. 1716 editam. AE* für Oktober 1718, S. 454—466.

[152] *Lettre de M. Herman, Professeur en Mathématique à Francfort sur l'Oder, aux Auteurs de ce Journal, JL 9,* 1718, S. 406—415. HERMANN verteidigt sich hier gegen KEILL, der in der *Défense* gegen HERMANNS Beweis des de MOIVRESchen Satzes über Zentripetalkräfte in der *Phoronomia* (1716) polemisiert hatte.

[153] *Lettre de Monsieur Jean Keill, Professeur ... à Monsieur Jean Bernoulli, Professeur ... écrite en Avril 1717, JL 10,* 1719, S. 261—287.

Pro Eminente Mathematico bezeichnet. In einem 1720 in London veröffentlichten Artikel brachte Keill Johann I Bernoulli mit Crusius in Verbindung[154]. Johann I Bernoulli hatte 1719 über Varignon von Newton Genugtuung für die Äußerungen Keills, den Johann I Bernoulli als das Sprachrohr Newtons betrachtete, verlangt. Varignon informierte auch de Moivre und bat ihn zu vermitteln[155]. Varignon und de Moivre bemühten sich von 1719 bis 1722, zwischen Newton und Johann I Bernoulli, der schließlich eine öffentliche Ehrenerklärung von Newton verlangt hatte, auszugleichen. Newton beteuerte, die Veröffentlichung von Keills *Epistola ad Joannem Bernoullium* nicht verhindert haben zu können, und auch de Moivre schrieb nun ganz im Sinne Newtons an Varignon im Brief vom 16. 9. 1721 (a. S.): *La Mort de M. Keill, arrivée depuis quinze jours, leve un grand obstacle à la paix.* Tatsächlich gelang es dann de Moivre, Newton zu einer Erklärung zu bewegen, und Varignon verstand es, Johann I Bernoulli von weiteren Forderungen abzubringen[156].

Schon die Mitgliedschaft im Prioritätsausschuß, die er als Aufgabe seiner Neutralität empfand[157], und noch mehr die zuletzt geschilderte Entwicklung bedeuteten für de Moivre die endgültige Bindung an England. Fühlte sich de Moivre eigentlich als Engländer? Dafür spricht, daß sich de Moivre etwa im Brief an Johann I Bernoulli vom 6. 7. 1708 (a. S.) mit den Engländern identifiziert, wenn er im Anschluß an den Sieg der verbündeten Engländer und Österreicher über Ludwig xiv. bei Oudenaarde schreibt: *Hier étant avec M. Halley et M. Machin on nous vint apprendre la nouvelle de la signalée victoire qui vient d'être remportée sur les François, là-dessus nous allâmes nous réjouir et célébrer un si heureux succès.* Montmort, der de Moivre 1715 persönlich in London kennengelernt hatte[158], äußerte sich im Brief vom 3. 4. 1718 (n. S.) an Johann I Bernoulli: ... *Mr. Moivre, qui est furieusement anglisé* ..., und Nikolaus I Bernoulli meint im Brief an Montmort vom 30. 7. 1718 (n. S.): ... *qu'après avoir été naturalisé, il s'est cru obligé de penser, de parler et de mépriser les étrangers, comme font la plûpart des autres Anglois* ...

De Moivre war englischer Staatsbürger geworden und lebte wie ein Engländer; dennoch blieb de Moivre sein Leben lang ein Außenseiter, auch für seine englischen Freunde. Sein nie unterbrochener Umgang mit Franzosen und sein großes Interesse an der französischen Dichtung beweisen einen doch teilweise Franzose gebliebenen de Moivre.

Die Korrespondenz mit Johann I Bernoulli und Nikolaus I Bernoulli war 1714 abgebrochen, da de Moivre die Briefe der beiden Bernoullis vom 4. 8. 1714 (n. S.) nie beantwortet hat[159]. Aus dem letzten Brief de Moivres an Nikolaus I Bernoulli vom 3. 3. 1714 (a. S.) geht hervor, daß de Moivre

[154] John Keill: *Epistola ad Joannem Bernoullium in qua Isaacum Newtonum et seipsum contra criminationes in Actis Lipsiensibus a Crusio quodam publicatas defendit.* London 1720.

[155] Siehe Varignon an Johann I Bernoulli, 6. 9. 1719 (n. S.).

[156] Vergleiche 2.3.3. und Briefwechsel Johann I Bernoulli mit Varignon seit Frühjahr 1719.

[157] Eine neutrale Haltung hatte de Moivre noch im Brief an Johann I Bernoulli vom 13. 3. 1705 (a. S.) bekundet.

[158] Siehe 2.3.3.

[159] Siehe 2.3.1.

spätestens 1714 die *rekurrenten Reihen* und deren Summierung gefunden hatte[160]. DE MOIVRE hat seine Theorie der *rekurrenten Reihen* teilweise in der ersten Auflage der *Doctrine of Chances* (1718) veröffentlicht[161]. Eine weitere Veröffentlichung erfolgte 1722 in den *PT* Nr. 373, nachdem DE MOIVRE darüber in der *Royal Society* 1720 vorgetragen hatte. Eine umfassende Darstellung brachte DE MOIVRE 1730 in den *MA*[162].

In dem eben erwähnten Brief an NIKOLAUS I BERNOULLI kündigt DE MOIVRE bereits eine stark erweiterte englische Ausgabe seiner *Mensura Sortis* an und überlegt, ob er nicht das von ihm gelöste *Problème de la mortalité du genre humain* miteinbeziehen sollte. Leider hat DE MOIVRE hier über das Sterblichkeitsproblem keine weiteren Angaben gemacht[163].

Als NIKOLAUS I BERNOULLI auf Grund der Bemühungen DE MOIVRES und NEWTONS — NIKOLAUS war 1712 für kurze Zeit nach London gekommen und von DE MOIVRE in den Kreis um NEWTON eingeführt worden — in die ROYAL SOCIETY aufgenommen wurde, beschloß man, die Lösungen von NIKOLAUS I BERNOULLI und DE MOIVRE für die Gewinnwahrscheinlichkeiten im sogenannten *Jeu de la Poule*[164] gleichzeitig in den *PT* für 1714 abzudrucken[165].

1715 publizierte DE MOIVRE über das *Folium Cartesii* in den *PT* eine kleine Arbeit, die JOHANN I BERNOULLI veranlaßte, im Brief an VARIGNON vom 6. 11. 1716 (n. S.) zu bemerken, er habe das nämliche Problem schon 25 Jahre früher gelöst[165a].

1716 waren die Arbeiten an der *Doctrine of Chances* bereits abgeschlossen; erst 1718 wurde das Buch gedruckt. In der *Doctrine* von 1718 ist das Problem der Spieldauer in der für DE MOIVRE endgültigen Form enthalten. Im Vergleich zur *Mensura Sortis* wird der Wandel in der Darstellung von einer reinen Aufgabensammlung zu einem methodisch aufgebauten Lehrbuch spürbar in einer — zwar noch kurzen — Einführung und einigen rein methodischen Zwischenabschnitten.

Der Brief VARIGNONS an JOHANN I BERNOULLI vom 9. 8. 1721 (n. S.)[166] bestätigt DE MOIVRES umfangreiche Korrekturarbeiten an der französischen Übersetzung von NEWTONS Optik[167] für die Pariser Ausgabe von 1722.

---

[160] Rekurrente Reihen sind Reihen, deren Koeffizienten einer homogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten genügen.

[161] S. 127—134.

[162] Buch 2, S. 26—42 und Buch 4, S. 72—91.

[163] In der *Doctrine* von 1718 ist dieses Problem nicht behandelt.

[164] Spielregel: Von n Spielern $A_1, A_2, \ldots, A_n$, deren Gewinnwahrscheinlichkeiten für ein Einzelspiel, das immer nur zwei bestreiten, gleich sind, beginnen A_1 und A_2 zu spielen. Der Verlierer dieses Spiels überläßt seinen Platz A_3. In dieser Weise wird weitergespielt, bis ein Spieler alle übrigen $n-1$ Spieler hintereinander besiegt hat. Gefragt wurde nach dem Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten zweier beliebiger Einzelspieler abhängig von der Reihenfolge des Spieleintritts.

[165] NIKOLAUS' Lösung in *PT* Nr. 341 für Oktober/Dezember 1714, S. 133—144, MOIVRES Lösung in derselben Nummer S. 145—158.

[165a] Vorlesungen für L'HOSPITAL; JOHANN I BERNOULLI, *Opera Omnia* III, Lausanne-Genf 1742, S. 403—407.

[166] Siehe Fußnote 33.

[167] Die von PIERRE COSTE besorgte Übersetzung erschien erstmalig 1720 in Amsterdam, in zweiter Auflage Paris 1722. Die Korrekturarbeiten MOIVRES bezogen sich auf die Pariser Ausgabe.

1721 hatte DE MOIVRE begonnen, sich intensiv mit Fragen der Rentenberechnung zu befassen. HALLEY hatte 1693 im Auftrag der ROYAL SOCIETY eine Sterbetafel mit dem Material des Pastors CASPAR NEUMANN (1648—1715) über die Geburten und Todesfälle in Breslau für die Zeit von 1687 bis 1691 in den *PT* veröffentlicht[168]. DE MOIVRE suchte nun nach einer Gesetzmäßigkeit der Absterbeordnung in HALLEYs Tafel. Er fand, daß die Zahl der in einem Jahr Verstorbenen dx über große Intervalle der betrachtenden Lebensalter konstant bleibt und setzte dann dx für das Intervall vom 12. bis zum vollendeten 86. Lebensjahr als konstant an. Die Berechtigung für diese Annahme sah DE MOIVRE in den geringen Differenzen zwischen den so berechneten und den von HALLEY mit Hilfe seiner Tafel berechneten Leibrentenwerten. Diese mathematisch faßbare Absterbeordnung, angewandt auf alle damals erdenklichen Rentenprobleme, bot den Inhalt für ein kleines Bändchen, das 1725 unter dem Titel *Annuities on Lives* erschien. Mit dieser Arbeit hatte DE MOIVRE dem Wunsch JAKOB BERNOULLIs entsprochen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf *bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse*[169] anzuwenden. JAKOB konnte dieses Vorhaben nicht mehr realisieren; deshalb hatte sein Neffe NIKOLAUS im Vorwort zur *AC* MONTMORT und MOIVRE aufgefordert, dem unvollendet gebliebenen vierten Teil der *AC* einen Abschluß zu geben. Daß sich JAKOB BERNOULLI speziell für Fragen der Rentenberechnung interessierte, beweist die im Briefwechsel mit LEIBNIZ in den Jahren 1703/05[170] hartnäckig wiederholte Anforderung von JAN DE WITTs (1625—1672) schwer erhältlichem Büchlein über Leibrenten[171].

1727 starb NEWTON, mit dem DE MOIVRE eine über 30jährige Bekanntschaft verbunden hatte. DE MOIVRE hat den freundschaftlichen Charakter seiner Beziehungen zu NEWTON immer sehr betont. Die erste Auflage der *Doctrine of Chances* ist NEWTON gewidmet. In dieser Widmung dankt DE MOIVRE für die Ehre, häufig zu privatem Gespräch mit NEWTON, der alle Schwierigkeiten MOIVREs in der Mathematik zu lösen verstand, zugelassen worden zu sein. MATY berichtet, NEWTON habe DE MOIVRE öfter abends in einem Café aufgesucht und ihn dann zu sich eingeladen, wo die beiden den Abend bei philosophischen Gesprächen verbrachten. Andererseits ist nicht bekannt, daß NEWTON sich jemals für DE MOIVRE eingesetzt hätte. DE MOIVRE war für NEWTON ein verläßlicher Famulus, der für ihn übersetzte und Korrekturen las, und dessen Loyalität NEWTON selbstverständlich schien. Der geistreiche *Refugié* zählte auch zu den wenigen, die NEWTONs kosmologisch-theologische Gedankengänge ebenso wie NEWTONs Physik verstanden.

Um 1727 hatte DE MOIVRE mit der Zusammenfassung der *Miscellanea Analytica* begonnen. Von CRAMER, der sich zu dieser Zeit in England aufhielt, erfährt NIKOLAUS I BERNOULLI im Brief vom 4. 2. 1728 (n. S.), daß DE MOIVRE das Manuskript für die *MA* im Wesentlichen abgeschlossen und die Subskription für

[168] *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives*, *PT* Nr. 196, 1693.

[169] Siehe *AC*, S. 210.

[170] Siehe dazu K. R. BIERMANN und M. FAAK, *G. W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt*, Forschungen und Fortschritte 33, 1959, S. 168—173.

[171] *Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten*, Den Haag 1671.

das Buch anlaufen lassen hat. CRAMER hat bereits einen Vordruck des ersten Buches der *MA* in Händen und kann auch über die anderen Teile berichten. CRAMER beurteilt DE MOIVRE in diesem Brief als einen sehr von sich eingenommenen Mann, dem jede Kritik unerträglich sei. Im Brief vom 21. 5. 1728 an NIKOLAUS I BERNOULLI gibt CRAMER als mutmaßlichen Grund für die Verzögerung der Ausgabe der *MA* mangelnde Subskribenten an[172].

Bis in diese Zeit reicht eine Auseinandersetzung DE MOIVRES mit HENRY PEMBERTON (1694—1771), deren Wurzeln in das Jahr 1722 zurückgehen. Der Streit entstand um einen Beweis des COTESschen Theorems, das eine geometrische Konstruktion der Linearfaktoren des Binoms $a^n \pm x^n$ (n natürlich) zum Inhalt hat[173]. DE MOIVRE hat seinen Beweis für das COTESsche Theorem ausführlich in den *MA* dargelegt.

Die Widmung an MARTIN FOLKES in den *MA* ist mit 7. 1. 1729/30 datiert; das ist nach neuem Stil der 18. 1. 1730. Im Brief an CRAMER vom 30. 4. 1731 (a. S.) macht DE MOIVRE einen Buchhändler, der bereits vor 15 Monaten das Buch auszuliefern versprochen hatte, für die Verzögerung verantwortlich. Man darf somit annehmen, daß die *MA* tatsächlich im Januar 1730 erschienen waren. Das Titelblatt des Werks verspricht *Miscellanea Analytica De Seriebus et Quadraturis* und darüber hinaus *verschiedene Betrachtungen über Methoden des Vergleichs, der Kombinationen und Differenzen, die Lösungen einiger schwieriger Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ebenso einfache Konstruktionen der Planetenbahnen zusammen mit einer Bestimmung der Extrema der Veränderungen bei den Bewegungen von Himmelskörpern.* Die *MA* können als eine Zusammenfassung von DE MOIVRES Schaffen in der Analysis und deren Anwendungen angesehen werden; das geringe Interesse DE MOIVRES für die Physik als Anwendungsbereich ist dabei auffallend.

DE MOIVRES Anteil an der STIRLINGschen Formel für $\log n!$ und die Entwicklung des MOIVREschen Grenzwertsatzes für binomiale Verteilungen läßt sich zum großen Teil in den *MA* und dem zu ihnen gehörigen *Supplementum* feststellen.

Von dem in der *AC* veröffentlichten *Bernoullischen Theorem* und einem ihm von ALEXANDER CUMING (1690?—1775) 1721 vorgelegten Wahrscheinlichkeitsproblem ausgehend, hatte DE MOIVRE die Notwendigkeit einer guten Abschätzung der Binomialkoeffizienten $\binom{2n(+1)}{n+v}$ des Binoms $(a+b)^{2n(+1)}$ für große n erkannt. DE MOIVRE besaß bereits 1721 eine Approximationsformel für $\binom{2n(+1)}{n}$ und eine weitere für das Verhältnis von $\binom{2n(+1)}{n}$ zu $\binom{2n(+1)}{n+p}$. Im Brief vom 19. 6. 1729 (a. S.) teilte STIRLING DE MOIVRE[174] seine Abschätzung für $\binom{2n(+1)}{n}$

[172] Die wissenschaftlichen Bücher wurden damals häufig auf Subskriptionsbasis verkauft. CRAMER nennt vergleichsweise zu der von DE MOIVRE erhofften Zahl von 150 bis 200 Subskribenten 3000 für die von PEMBERTON besorgte dritte Auflage der *Principia Mathematica* von NEWTON (1726 erschienen). Die den *Elements of Algebra* SAUNDERSONS beigeheftete Subskribentenliste ergibt nahezu 1000 Bestellungen.

[173] JOHANN I BERNOULLI, der im Brief vom 8. 4. 1729 (n. S.) an J. B. MENCKE, den Herausgeber der *AE*, den Streit zwischen DE MOIVRE und PEMBERTON zu veröffentlichen vorschlägt, war von CRAMER im Brief vom 8. 1. 1729 unterrichtet worden. Tatsächlich erschien in den *AE* von 1730, S. 510f. als Brief eines Anonymus *e Gallico sermone in Latinum translata* ein Bericht über diese Auseinandersetzung.

[174] Veröffentlicht in den *MA*, S. 170—172.

für sehr große n mit. Stirling hatte die bei der Abschätzung auftretende Konstante durch die Kreiszahl π ausgedrückt. Nachdem de Moivre Stirlings ohne Beweis übersandtes Ergebnis gesehen hatte, suchte er fieberhaft nach einer Begründung. Über Wallis' Produktdarstellung von $4/\pi$ konnte er eine der Stirlingschen Abschätzung für $\binom{2n(+1)}{n}$ äquivalente finden.

Einige Tage nach der Edition der *MA* teilte Stirling de Moivre seine Formel für $n!$ in logarithmischer Form mit. Diese Formel ist auch in der noch 1730 erschienenen *Methodus Differentialis* Stirlings enthalten. Im September 1730 schrieb Stirling an Cramer[175]:

> *The 20 Prop: about the Suming of Logarithms has been considered by Mr. de Moivre since the publication of my Book, and he has found a Series more simple than mine which is as follows .... Mr. de Moivre is to publish this with his manner of finding it out, which is quite different from mine ...*

De Moivre ließ das hier von Stirling angekündigte *Miscellaneis Analyticis Supplementum* noch 1730 veröffentlichen. Er schickte an Cramer die *MA* bereits mit dem *Supplementum* und der Angabe, daß diese Ergänzung, drei oder vier Monate nach den *MA* herausgekommen sei[176]. In diesem Anhang zu den *MA* gibt de Moivre eine Formel für die Summen der Logarithmen einer arithmetischen Reihe mit ausführlichem Beweis ebenso wie eine verbesserte Approximation für $\binom{2n(+1)}{n}$.

Mit diesen Arbeiten hängt der Grenzwertsatz eng zusammen, den de Moivre in dieser Form nach 1730, wahrscheinlich erst 1733 gefunden hat. Am 12. 11. 1733 (a. S.) ließ de Moivre diese seine vielleicht bedeutendste Leistung, zu der er erst nach seinem 63. Lebensjahr fand, für einige Freunde unter dem Titel *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem expansi* drucken[177].

Die Zeit von 1727 bis 1733 war für de Moivre noch einmal ziemlich fruchtbar; es scheint, daß sich seine schwache Gesundheit — er hatte im Briefwechsel mit Johann I Bernoulli sehr oft über Krankheit geklagt — etwas stabilisiert hatte. Nach 1733 allerdings gibt es keine Veröffentlichung de Moivres, die sich nicht ganz auf frühere Arbeiten stützt. So erschien 1738 von dem inzwischen (am 23. 8. 1735 (n. S.)) zum Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften gewordenen de Moivre die gegenüber der *Doctrine of Chances* von 1718 stark erweiterte zweite Auflage. Zu den Erweiterungen gehört auch die englische Übersetzung der *Approximatio* von 1733. Der bereits 1718 im Vergleich zur *Mensura Sortis* spürbare Wandel von einer Aufgabensammlung zum methodischen Lehrbuch ist hier noch stärker ausgeprägt.

1739 kandidierte der frühere Schüler und Freund de Moivres John Colson für den durch den Tod Saundersons freigewordenen Lehrstuhl in Cambridge. Als Gegenkandidat war der 72jährige de Moivre aufgestellt, der dazu vorher durch eine königliche Verfügung *(Litterae Regiae)* zum M.A. des Trinity College

---

[175] Tweedie a.a.O., S. 119.

[176] Brief de Moivre an Cramer vom 30. 4. 1731 (a. S.).

[177] Bis heute sind nur drei Originale bekannt, die sämtlich Ausgaben der *MA* beigebunden sind. Ein Exemplar besaß die Preußische Staatsbibliothek, eines liegt in der University College Library in London und eines in der Universitätsbibliothek Basel.

in Cambridge gemacht worden war[178]. WILLIAM COLE (1714—1782) berichtet darüber[179]: *He* [COLSON] *was opposed by old Mr. de Moivre, who was brought down to Cambridge and created M.A. when he was almost as much fit for his coffin; he was a mere skeleton, nothing but skin and bone.* DE MOIVRE brauchte seine Schüler in London nicht aufzugeben.

1743 brachte er eine stark verbesserte Auflage der *Annuities on Lives* heraus. Der letzte Abschnitt des Vorwortes ist ein Angriff auf den jungen THOMAS SIMPSON (1710—1761), der 1742 ein Buch über denselben Gegenstand veröffentlicht hatte[180]:

> *After the pains I have taken to perfect this Second Edition, it may happen, that a certain Person, whom I need not name, out of Compassion to the Public, will publish a Second Edition of his Book on the same Subject, which he will afford at a very moderate Price, not regarding whether he multilates my Propositions, obscures what is clear, makes a Shew of new Rules, and works by mine; in short, confounds, in his usual way, every thing with a croud* [sic] *of useless Symbols; if this be the Case, I must forgive the indigent Author, and his disappointed Bookseller.*

Der Unmut über diesen Konkurrenten, der ein Buch in DE MOIVRES ureigenster Domäne anscheinend preisgünstiger anbieten wollte, ist großenteils verständlich. SIMPSON hatte schon 1740 mit seinem Buch *The Nature and Laws of Chance,* das als eine Kurzfassung der *Doctrine* DE MOIVRES von 1738 anzusehen ist, DE MOIVRE sehr gereizt; dabei hatte er bei allem Respekt vor *that great Man* als neue und bessere Methoden angeboten, was DE MOIVRE längst publiziert hatte. Die Situation ähnelte ein wenig der zwischen DE MOIVRE und MONTMORT nach der Edition der *Mensura Sortis;* nur war jetzt DE MOIVRE der Leidtragende. Die Heftigkeit, mit der sich DE MOIVRE im Vorwort zu den *Annuities* gewehrt hatte, setzte ihn in den Augen mancher Zeitgenossen ins Unrecht. SIMPSON nahm 1743 in einem Appendix[181] Stellung zu DE MOIVRES Attacke. SIMPSON versuchte darin sein Buch durch Verbesserung und Vereinfachung der Regeln DE MOIVRES als überlegen darzustellen. In den späteren Auflagen der *Annuities* von 1750, 1752 und 1756 (zusammen mit der *Doctrine of Chances*) wurde der SIMPSON betreffende Teil des Vorworts weggelassen.

Zu den Enttäuschungen dieser Zeit kam für DE MOIVRE die Notwendigkeit, auch noch im hohen Alter seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Eine Beschreibung der Lebensumstände liefert die *Penny Cyclopaedia*[182]:

> *Demoivre lived to the advanced age of more than eightyseven; but as he outlived most of his early associates and friends, his circumstances became greatly reduced. He is said to have sunk into a state of almost total lethargy, the attacks of which often lasted for several days; and his subsistence was latterly dependent on the solution of questions relative to games of chance and other matters connected with the value of probabilities, which he was in the habit of giving at a tavern or coffeehouse in St. Martin's Lane*[183].

---

[178] Siehe J. u. J.A. VENN a.a.O. II, Cambridge 1922.

[179] Siehe Artikel über JOHN COLSON in *Dictionary of National Biography* XI, London 1887, S. 405.

[180] *The Doctrine of Annuities and Reversions,* London 1742.

[181] *Appendix, containing Some Remarks on Mr. Demoivre's Book on the same Subject, with Answers to some Personal and Malignant Misrepresentations, in the Preface thereof.*

[182] VIII, London 1837, S. 381.

[183] Schon im Brief an JOHANN I BERNOULLI vom 18. 10. 1712 (a. S.) gab DE MOIVRE als Adresse an: *To Mr. de Moivre to be left at Slaughters coffee house the upper end of St. Martins Lane.* Auch COLIN MACLAURIN benutzte 1730 dieselbe Adresse (siehe 2.3.3.).

Soweit diese düstere Schilderung, die durch Andeutungen von Maty, daß der unverheiratete de Moivre bis zum Schluß Verbindung zu seinen Verwandten hatte, denen er auch seine bescheidenen Ersparnisse vermachte, daß ein kleiner Kreis von Freunden de Moivres Angelegenheiten erledigen half, gemildert wird.

Gegen Ende seines Lebens wurde de Moivre teilweise blind und taub. Es wird über ein Schlafbedürfnis von über zwanzig Stunden täglich berichtet. Diesen gebrechlichen alten Mann überraschte die Mitteilung seiner Aufnahme in die *Académie Royale des Sciences* in Paris vom 27. 6. 1754 (n. S.)[184].

In den letzten Lebensjahren hatte de Moivre eine dritte Auflage der *Doctrine* geplant. In dieser Ausgabe sollte die schon zur Zeit seines fruchtbaren Wettstreits mit Montmort und Nikolaus I Bernoulli beabsichtigte, in der *Doctrine* von 1738 begonnene Vereinigung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fragen der Lebensversicherung in einem Buch vollkommen realisiert werden. Der ungenannte Herausgeber dieser posthum (1756) erschienenen Auflage erklärt die Entstehung in einem *Advertisement*:

> *The Author of this Work, by the failure of his Eyesight in extreme old age, was obliged to entrust the Care of a new Edition of it to one of his Friends; to whom he gave a Copy of the former, with some marginal Corrections and Additions, in his own hand writing. To these the Editor has added a few more, where they were thought necessary: and has disposed the whole in better Order; by restoring to their proper places some things that had been accidentally misplaced, and by putting all the Problems concerning Annuities together; as they stand in the late improved Edition of the Treatise on that Subject. An Appendix of several useful Articles is likewise subjoined: the whole according to a Plan concerted with the Author, above a year before his death.*

De Moivre war am 27. 11. 1754[185] verschieden. In einer Schlußbetrachtung schildert ihn Maty[186] als einen Menschen, der neben der Mathematik und der französischen Dichtung seiner Zeit die griechischen und römischen Klassiker so gut kannte, daß man bei der Übersetzung schwieriger Passagen oftmals seinen Rat suchte. Der *Misanthrope* Molières, den Moivre auswendig vortragen konnte, reizte Maty zu einem Vergleich mit de Moivre: *Il jugeoit avec quelque sévérité les hommes, et quelquefois un coup d'oeil le décidoit. Il ne déguisoit point assez l'ennui que lui causoit la sottise, et l'aversion qu'il avoit du manège et de la fausseté.*

Seine theologischen Vorstellungen hat der alte de Moivre im Anschluß an seinen Grenzwertsatz zusammengefaßt[187]: *And hence, if we blind not ourselves with*

---

[184] *Histoire de l'Académie des Sciences* 1754, Paris 1756, S. 183.

[185] Siehe *Gentleman's Magazine, and Historical Cronicle 24*, 1754, S. 530.

[186] Matys abschließende Würdigung und Charakterisierung de Moivres findet sich S. 38—42.

[187] *Doctrine of Chances*, 1756, S. 252.

H. M. Walker a. a. O., S. 328 zitiert denselben Satz, um damit zu belegen, daß de Moivres religiöse Überzeugungen sein ganzes Leben bestimmten. Im Gegensatz dazu läßt Maty de Moivres Glauben von guten Freunden als nicht *au dela du Naturalisme* schildern. Weder in den heute bekannten Briefen noch im publizierten Werk findet sich eine andere Stelle, die über de Moivres religiöse Vorstellungen informiert. Ich halte daher diesen Satz als nur für den de Moivre der letzten Lebensphase charakteristisch.

metaphysical dust, we shall be led, by a short and obvious way, to the acknowledgment of the great Maker and Governour of all; Himself all-wise, all-powerful and good. Diese Stelle zeigt de Moivre in Übereinstimmung mit Newtons Überzeugungen[188].

Das Urteil über die wissenschaftlichen Leistungen Abraham de Moivres überläßt Maty denjenigen, *qui savent lire les écrits de Mr. de Moivre.* In den folgenden fachlichen Abschnitten sollen daher die Grundlagen für eine Einordnung de Moivres in die Geschichte der Mathematik gegeben werden.

4. Die Lösung spezieller Gleichungen höheren als vierten Grades durch Radikale von Viète bis de Moivre

De Moivre steht mitten in einer Entwicklung, die von der Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichung im 16. Jh. bis zum erst im 19. Jh. geglückten Nachweis der Unmöglichkeit reicht, die Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften und höheren Grades durch Radikale darzustellen[189].

Schon im 16. Jh. kannte man etwa von den Kreisberechnungen durch Polygonapproximationen die Winkelteilungsgleichung für den Sinus[190]. In der Folgezeit bis einschließlich Leonhard Euler (1707—1783) versuchte man den Bereich der durch Radikale lösbaren speziellen Gleichungen zu erweitern in der Hoffnung, damit den Bereich aller Gleichungen beliebigen Grades überdecken zu können.

Es wird dabei auffallen, daß die hier behandelten Arbeiten de Moivres teilweise nur vom Ergebnis her mit der Entwicklung der Gleichungslehre zu tun haben. Die Berechtigung, all diese Arbeiten unter einem Aspekt zu sehen, ist gegeben durch die weitere Entwicklung bei Euler, der sich in seinen Arbeiten über die Auflösung höherer Gleichungen wesentlich auf de Moivre stützte.

Es muß bei dieser Entwicklung auch die allmähliche Verwendung komplexer Zahlen und das Rechnen mit komplexen Zahlen berücksichtigt werden. Dieser Prozeß einer Gewöhnung und schließlich die Vertrautheit mit den Eigenschaften der komplexen Zahlen war eine Voraussetzung für ihre Einführung und Darstellung in einer komplexen Zahlenebene z.Z. des Übergangs vom 18. zum 19. Jh.

---

[188] Siehe Colin Maclaurin, *An Account of Sir Isaac Newton's Philosophy*, London 1748, und E.W. Strong, *Newton and God* a.a.O.

[189] Paolo Ruffinis (1765—1822) Beweis von 1799 der Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades ist lückenhaft. Der erste gültige Beweis wurde von Niels Henrik Abel (1802—1829) 1824 in Oslo und wesentlich erweitert 1826 in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik veröffentlicht.

[190] Adriaan van Roomen (1561—1615) hatte in den 1593 erschienenen *Ideae mathematicae* ein *Problema mathematicum omnibus orbis mathematicis ad construendum propositum* vorgelegt. Es handelt sich um die Auflösung einer Gleichung 45-sten Grades, die den funktionalen Zusammenhang zwischen der Sehne eines Winkels und der Sehne des 45-sten Teiles dieses Winkels wiedergibt.

Berühmt ist die Veröffentlichung der 23 positiven Lösungen in dem 1595 in Paris erschienenen *Francisci Vietae responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus.* Unabhängig davon hatte auch Ludolph van Ceulen (1540—1610) eine richtige Lösung gegeben.

Der besonderen Stellung der Winkelteilungsgleichungen als Ausgangspunkt für die Entdeckung spezieller durch Radikale lösbarer Gleichungen höheren als vierten Grades ist durch eine ausführlichere Darstellung der DE MOIVRES Leistung mitbedingenden Arbeiten der BERNOULLIS und ihrer Vorgänger Rechnung getragen.

4.1. François Viète und Pierre de Fermat

FRANÇOIS VIÈTE (1540—1603) hat mit der von ihm eingeführten Buchstabenrechnung[191] die Möglichkeit geschaffen, die allgemeine Gleichung beliebigen Grades symbolisch anzuschreiben. Er konnte die in der *Ars Magna* (1545) von CARDANO (1501—1576) veröffentlichten Lösungen der kubischen Gleichung von SCIPIONE DAL FERRO (1465—1526) und NICCOLÒ TARTAGLIA (1500?—1557) sowie der biquadratischen Gleichung von LUDOVICO FERRARI (1522—1565) allgemein formulieren. In der Propositio 25, dem letzten Satz des vor 1591 entstandenen *Supplementum Geometriae*, stellt VIÈTE fest[192]:

> *Generaliter id verum est, opere saltem alterutro, vel constructionis duarum mediarum continue proportionalium inter datas, vel sectionis anguli in tres partes aequales, omnia problemata, alioqui non solubilia, explicari, in quibus Cubi solidis, vel Quadratoquadrata plano-planis sine adfectione vel cum adfectione adaequantur.*

Jede kubische und biquadratische Gleichung läßt sich durch Einschub zweier geometrischer Mittel oder durch Winkeldreiteilung lösen. LEIBNIZ hat, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, die Gesamtheit der durch Einschub von geometrischen Mitteln oder durch Winkelteilung lösbaren Gleichungen zusammengestellt.

Die wichtigsten Ergebnisse der Winkelteilungen hat VIÈTE in den um 1570[193] entstandenen *Angulares Sectiones*, die allerdings erst 1615 durch ALEXANDER ANDERSON veröffentlicht wurden, niedergelegt und zum größten Teil in der 1595 publizierten Antwort auf das Problem des ADRIAAN VAN ROOMEN[194] wiederholt.

Schon im dritten Theorem der *Angulares Sectiones* gibt VIÈTE in einer Tabelle[195] eine Vorstufe des sogenannten MOIVRESchen Satzes

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Hypotenuse, Ankathete und Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel α bezeichnet VIÈTE der Reihe nach mit Z, D und B. Danach gibt er für $n = 2, 3, 4, 5$ die Potenz des n-ten Verhältnisses *(Potestas rationis duplae, triplae etc.)*, d.h. er ordnet in zwei Spalten Z^n das entsprechende $(D+B)^n$ zu. Im Ergebnisteil der Tabelle für den n-fachen Winkel bestimmt VIÈTE die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel $n\alpha$, indem er die Hypotenuse Z^n, die Ankathete dem Realteil und die Gegenkathete dem Imaginärteil der Entwicklung $(D + i\,B)^n$ proportional macht.

---

[191] Siehe: *In Artem Analyticen Isagoge*, Tours 1591.

[192] Tours 1593 und in den von SCHOOTEN edierten *Opera Mathematica*, Leiden 1646, S. 240—257; hier speziell in der Ausgabe Tours 1593, S. 21; in den *Opera*, S. 256.

[193] Zur Datierung der VIÈTEschen Arbeiten siehe J.E. HOFMANN, *Geschichte der Mathematik* I, Berlin 1963. In den *Opera* finden sich die *Angulares Sectiones* S. 287 bis 304.

[194] Siehe das in Fußnote 190 erwähnte *Responsum* in den *Opera*, S. 305—324.

[195] VIÈTE, *Opera*, S. 290.

VIÈTE, der weder negative noch gar komplexe Zahlen verwendet, drückt das im Theorem III[196] so aus:

Ad similitudinem autem laterum circa rectum hypotenusae congruentium, efficitur a base et perpendiculo primi ut binomia radice, potestas aeque alta, et singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successive, utrobique primum adfirmata, deinde negata, et harum primae parti similis sit basis secundi, perpendiculum reliquae.

Zur (Berechnung der) Proportionalität (mit demselben Proportionalitätsfaktor) von An- und Gegenkathete (des rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel $n\alpha$) wird ein Binom aus An- und Gegenkathete des ersten Dreiecks (mit dem spitzen Winkel α) zur Potenz n erhoben, und die einzelnen Glieder dieses Binoms werden der Reihe nach auf zwei Teile verteilt, wobei in beiden Teilen die Glieder mit positivem beginnend abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben; dabei soll die Ankathete (des Dreiecks mit dem Winkel $n\alpha$) dem ersten und die Gegenkathete dem zweiten Teil proportional sein.

Setzt man $D/Z = \cos\alpha$, $B/Z = \sin\alpha$ und entsprechend VIÈTEs Tabelle

$$\frac{\mathrm{Re}\,(D+iB)^n}{Z^n} = \cos n\alpha$$
$$\frac{\mathrm{Im}\,(D+iB)^n}{Z^n} = \sin n\alpha,$$

dann bedeutet VIÈTEs Aussage wegen

$$\frac{\mathrm{Re}\,(D+iB)^n}{Z^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{D}{Z}+i\,\frac{B}{Z}\right)^n = \mathrm{Re}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

in moderner Form

$$\cos n\alpha = \mathrm{Re}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$
$$\sin n\alpha = \mathrm{Im}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \quad \text{für} \quad 0 \leqq n\alpha \leqq \frac{\pi}{2}.$$

VIÈTE bringt in einer Ergänzung zu Theorem III, wie er in der Überschrift sagt, *dasselbe anders, der geometrischen Ausdrucksweise angepaßt.* Er gibt hier das Verhältnis von Ankathete zu Gegenkathete des Dreiecks mit dem spitzen Winkel $n\alpha$, also ctg $n\alpha$, als Funktion von D und B für $n = 2$, bis $n = 7$ explizit sowie das allgemeine Bildungsgesetz an[197]:

Si fuerint triangula rectangula quotcumque, et horum secundi angulus acutus sit duplus ad acutum primi, tertii triplus, quarti quadruplus, quinti quintuplus, et eo continuo naturali progressu, primi autem trianguli perpendiculum statuatur prima proportionalium, basis eiusdem secunda, eaque series continuetur.

Man hat beliebig viele rechtwinklige Dreiecke, wobei der spitze Winkel des zweiten doppelt so groß wie der spitze des ersten, der spitze Winkel des dritten dreimal so groß wie der des ersten ist, u.s.w. Die Gegenkathete des ersten Dreiecks werde festgelegt als die erste, die Ankathete als die zweite von proportionalen Größen, und diese Folge werde fortgesetzt.

Es soll also eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied B und dem Quotienten $D/B = \mathrm{ctg}\,\alpha$ gebildet werden.

[196] VIÈTE, *Opera*, S. 289.
[197] VIÈTE, *Opera*, S. 290f.

Viète fährt fort:

In secundo, erit basis ad perpendiculum, ut tertia minus prima ad secundam bis.

$\operatorname{ctg} 2\alpha$ ist gleich dem Verhältnis der Differenz des dritten und ersten Gliedes der Folge zum zweifachen zweiten Glied.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{B \operatorname{ctg}^2 \alpha - B}{2B \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Nach entsprechenden Formeln für $\operatorname{ctg} n\alpha$, $n = 3$ bis 7 gibt Viète das allgemeine Bildungsgesetz:

Et ita in infinitum, distributis successive in duas partes proportionalibus, secundum earum seriem, utrobique primum adfirmatis deinde negatis, et sumptis multiplicibus, ut ordo graduum in artificiosa genesi potestatum, quibus eae addicuntur exigit.

So fährt man fort, indem man die Glieder der Folge nacheinander gemäß ihrer Reihenfolge zwei Teilen zuordnet. In beiden Teilen folgt mit positivem beginnend auf jedes positive ein negatives Vorzeichen; dabei sind die Folgeglieder mit der Vielfachheit zu nehmen, die der Ordnung der Grade in der kunstreichen Binomialentwicklung entspricht.

Dieses allgemeine Bildungsgesetz für $\operatorname{ctg} n\alpha$ entspricht in moderner Schreibweise der Formel:

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}\alpha + i)^n}{\operatorname{Im}(\operatorname{ctg}\alpha + i)^n}.$$

In den weiteren Theoremata IV bis IX[198] bringt Viète die den aus $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ ableitbaren Polynomen in $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ bzw. den mit Hinzunahme von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ entstehenden Polynomen in $\sin\alpha$ für $\sin n\alpha$, n ungerade, und den Polynomen in $\cos\alpha$ für $\cos n\alpha$ entsprechenden Beziehungen zwischen der An- und Gegenkathete des rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel $n\alpha$ und der An- und Gegenkathete des rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel α bei gegebener Relation zwischen den Hypotenusen. Viètes Herleitung dieser Beziehungen, die er immer für die ersten n explizit angibt, ist nicht bekannt. Die Beziehung für beliebiges n kann dann aus den beigegebenen, nach dem für Viète aus den ersten n ersichtlichen Bildungsgesetz beliebig fortsetzbaren Koeffiziententafeln *(Canones)* erschlossen werden[199].

Mit Hilfe dieser Theorie der Winkelschnitte konnte Viète die 1593 von van Roomen vorgelegte Gleichung 45-sten Grades leicht lösen. Viète erkannte, daß durch diese Gleichung $2\sin 45\alpha$ als Funktion von $2\sin\alpha$ $(0 < 45\,\alpha < \pi)$ dargestellt war. Van Roomen hatte $2\sin 45\alpha$ als Konstante vorgegeben, und Viète vermochte die 23 positiven Lösungen dieser Gleichung als $2\sin\alpha$, $2\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{45} - \alpha\right)$, $2\sin\left(\frac{2n\pi}{45} + \alpha\right)$; $n = 1, \ldots, 11$ anzugeben[200].

Pierre de Fermat (1601—1665) beschäftigte sich mutmaßlich 1661 mit Viètes Lösung der van Roomenschen Gleichung. Dezember 1661 schrieb Fermat

---

[198] Viète, *Opera*, S. 291—300.

[199] Für eine genauere Übersicht der einzelnen Beziehungen und Formeln in den *Angulares Sectiones* vergleiche Ch. J. Scriba a.a.O., S. 36—43.

[200] Viète, *Opera*, S. 312f. und vgl. Ch. J. Scriba a.a.O., S. 34f.

an CHRISTIAAN HUYGENS[201], VIÈTE habe die VAN ROOMENsche Gleichung nicht allgemein lösen können.

Zunächst lobte er VIÈTEs Verfahren:

Sane perquam eleganter et doctissime, suo more, quaestionem propositam abduxit Vieta ad sectiones angulares et tabulam feliciter construxit, pag. 318 editionis Elzevirianae[202], *ad quotlibet in infinitum terminos, methodo qua usus est, facile extendendam, cujus beneficio dignoscitur quaenam aequationes ad speciales angulorum sectiones pertineant.*

Si enim, in sedibus numerorum imparium, sumatur primo

$$1\,C - 3\,N \text{ aequalis numero dato } [x^3 - 3x = c]$$

qui non sit major binario, reducitur quaestio ad trisectionem anguli.

FERMAT stellte fest, daß diese kubische Gleichung und analog die VAN ROOMENsche nur im Falle $|c| < 2$ als Winkelteilungsgleichung angesehen und gelöst werden könne; nur dann läßt sich $c = 2 \sin n\alpha$ bzw. $c = 2 \cos n\alpha$ ansetzen. Für den Fall $c > 2$ *silet statim omne sectionum angularium mysterium et ad quaestionis propositae solutionem inefficax dignoscitur.* Die kubische Gleichung kann auch VIÈTE für $c > 2$ lösen, aber für die entsprechenden Gleichungen fünften und höheren Grades versagt sein Verfahren. Dazu weiter FERMAT:

*In omnibus omnino tabulae praedictae [*VIETEs *der Darstellung von* $\cos n\alpha$ *als Funktion von* $\cos\alpha$ *entsprechende Tafel] casibus, quoties numerus datus est binario major, solutiones propositae quaestionis per extractionem radicum comodissime dari posse.*

Observavimus quippe, imo et demonstravimus, in omnibus illis casibus [Winkelteilungsgleichungen für den Cosinus vom Grade $2n+1$, $n = 2, 3, \ldots$*] quaestiones posse deduci, sicut in cubicis ad quadraticas a radice cubica, ex methodo Cardani et Vietae, sic in quadratocubicis ad quadraticas a radice quadratocubica, in quadratoquadratocubicis ad quadraticas a radice quadratoquadratocubica, et ita uniformi in infinitum progressu.*

Die Lösung all dieser in den Koeffizienten mit den Winkelteilungsgleichungen übereinstimmenden Gleichungen vom Grade $2n+1$ läßt sich auf eine quadratische Gleichung einer $(2n+1)$-ten Potenz zurückführen. FERMAT erläutert das folgendermaßen:

Sed proponatur, in exemplo Vietae et Adriani,

$$1\,QC - 5C + 5N \text{ aequari } 4,$$

vel alteri cuilibet numero binario majori.

Fingemus, perpetua et ad omnes tabulae casus producenda in infinitum methodo, radicem quaesitam esse $\frac{1Q+1}{1N}$, *cujus beneficio resolvendo hypostases, evanescent*

---

[201] HUYGENS, *Oeuvres complètes* III, S. 447—450 und *Oeuvres de Fermat* I, S. 189—194. Der Brief ist lateinisch verfaßt; eine französische Übersetzung findet sich in III der *Oeuvres de Fermat.*

[202] Gemeint sind die *Opera Mathematica* VIÈTEs hrsg. von FR. VAN SCHOOTEN, Leiden 1646. Auf S. 318 findet sich eine der Darstellung von $\cos n\alpha$ als Funktion von $\cos\alpha$, $n = 2, \ldots, 9$ entsprechende Tabelle. VIÈTEs Behandlung der VAN ROOMENschen Gleichung zeigt allerdings, daß er die dem Sinus entsprechenden Beziehungen benutzt hat.

semper homogenea simplici per extractionem radicum quaestionis resolutioni contraria; et in hoc casu ad exemplum praecedentis, radix proposita aequabitur

radici quadratocubicae binomii $2+\sqrt{3}$

$+$ *radice quadratocubica apotomes* $2-\sqrt{3}$.

FERMAT ging von dem der VIÈTEschen Tafel entnommenen Beispiel

$$x^5-5x^3+5x=c, \quad c>2, \quad \text{hier} \quad c=4,$$

aus. Durch die Substitution $x=\frac{y^2+1}{y}$ schaffte er alle Glieder der Gleichung weg, *die einer einfachen Lösung durch Wurzelziehen entgegenstehen.* Führt man die Substitution durch, so erhält man die Gleichung:

$$y^5+y^{-5}-c \quad \text{oder} \quad (y^5)^2-c\,y^5+1=0,$$

damit $y^5=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-1}$ und daraus schließlich

$$x=\sqrt[5]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-1}}+\sqrt[5]{\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-1}}.$$

Allgemein behauptete FERMAT, die Substitution $x=\frac{y^2+1}{y}$ führe für jede der Tafel VIÈTEs entnommene Gleichung vom Grad $2n+1$ mit einer Konstanten $c>2$ auf eine Gleichung

$$z^{2n+1}+z^{-(2n+1)}=c$$

und damit zu einer Lösung

$$x=\sqrt[2n+1]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-1}}+\sqrt[2n+1]{\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-1}}.$$

Quod tu, Vir Eruditissime, non solum experiendo deprehendes, sed et demonstrando, quandocumque libuerit, assequeris: ea enim est aequationum ex tabula Vietae derivandarum specifica proprietas, ut semper ipsarum solutiones, in iis casibus in quibus homogeneum comparationis est binario majus, simplices omnino extractionis radicum beneficio evadant.

Vel igitur numerus datus, termino tabulae analyticae aequandus, est binarius vel minor binario vel eodem binario maior.

Primo casu semper radix proposita est ipse binarius.

Secundo devolvitur quaestio proposita secundum Vietam ad angulares sectiones.

Tertio per nostram methodum jam expositam, hoc est per extractionem radicum, facile expeditur.

FERMAT machte also die drei Fallunterscheidungen $c \gtreqless 2$.

Für $c=2$ ist eine Wurzel der Gleichung ebenfalls 2.

Für c kleiner 2 liegt eine bereits für VIÈTE lösbare Winkelteilungsgleichung vor.

Für c größer 2 läßt sich eine Wurzel nach der von FERMAT erläuterten Methode finden.

Hätte FERMAT diese Fallunterscheidung nicht getroffen, d. h. die Verwendung imaginärer Größen zugelassen, dann hätte er im Fall c kleiner 2 eine der Formel

$$2\cos\frac{\alpha}{2n+1}=\sqrt[2n+1]{\cos\alpha+i\sin\alpha}+\sqrt[2n+1]{\cos\alpha-i\sin\alpha}$$

entsprechende angeben können.

Über den Weg zu der Methode, x durch $y+\frac{1}{y}$ zu ersetzen, äußerte FERMAT nichts[203]. Seinen Brief an HUYGENS schloß FERMAT mit den Worten:

> *Nihil de multiplicibus aequationis vel quaestionis propositae solutionibus adjungimus: primogenitam tantum repraesentamus, de reliquis, quarum operosior est disquisitio, alias fortasse, si otium suppetat, fusius acturi.*

Für die hier von FERMAT angekündigten Untersuchungen der weiteren Wurzeln wurde bis jetzt keine Quelle gefunden.

4.2. Die in der Leibniz-Handschrift *De Bisectione Laterum* enthaltenen algebraischen Vorstellungen und Ergebnisse

LEIBNIZ hatte sich nach eingehenden Studien der zeitgenössischen Literatur, insbesondere der von FRANS VAN SCHOOTEN edierten *Geometria* DESCARTES[204], intensiv mit algebraischen Studien beschäftigt. In Hannover finden sich mehrere LEIBNIZ-Handschriften algebraischen Inhalts aus dem Jahre 1675[205]. Stellvertretend für die sich teilweise inhaltlich wiederholenden Arbeiten[206] möchte ich hier auf das Juli 1675 entstandene Manuskript *De Bisectione Laterum* eingehen[207].

LEIBNIZ war zu dieser Zeit und mit seiner Zeit der Meinung, die Wurzeln der Gleichungen fünften und höheren Grades ließen sich ebenso wie der zweiten, dritten und vierten Grades durch Radikale darstellen[208]. In einem Anhang zur *Bisectio Laterum* äußerte sich LEIBNIZ:

> *Algebra duas habere partes intelligi potest contemplativam de Aequationum Resolutione et practicam de constructione. Resolutio Aequationum consistit in expressione Analytica Radicum sive rationalium sive irrationalium. Vieta docuit extrahere Radices rationales si quae sunt ex aequationibus numeralibus. Idemque credo etiam in literalibus post Huddenii[204] inventa fieri potest. Cartesius viam ostendit qua deprimi possunt aequationes examinando scilicet ex quibusnam inferioribus produci possint. Sed quando aequationes deprimi nequeunt, tunc res eo redit ut eas per Radices irrationales sui gradus exprimamus. Haec Algebrae pars vix tracta est, et quae unus Scipio Ferreus in eo genere dedit, debentur theoremati cuidam particulari. Idonea autem defuere principia, qualia tandem mihi videor reperisse.*

---

[203] DE MOIVRE konnte diese Substitution direkt ableiten, siehe Abschnitt 4.4.2. und Fußnote 262. Vergleiche auch: J.E. HOFMANN (7) a.a.O., S. 174.

[204] LEIBNIZ benutzte den von ihm erwähnten Arbeiten nach zu schließen die Ausgabe Amsterdam 1659/61. Der Grundgedanke der vorliegenden *Bisectio Laterum* war in dem von VAN SCHOOTEN verfaßten *Appendix, De Cubicarum Aequationum Resolutione* vorbereitet. Wichtig für LEIBNIZ ist auch der in der *Geometria* veröffentlichte Brief HUDDES an FRANS VAN SCHOOTEN vom 15. 7. 1657 *De Reductione Aequationum*. Über den Inhalt des HUDDEbriefes vergleiche K.H. HAAS a.a.O., S. 238—249 und S. 269—274.

[205] Siehe: *Catalogue critique des Manuscrits De Leibniz* II [März 1672—November 1676], Poitiers 1914—1924.

[206] Vergleiche J.E. HOFMANN (5) a.a.O. Abschnitt 11, *Algebraische Studien*.

[207] Dieses Manuskript, auf das mich Herr J.E. HOFMANN hingewiesen hat, liegt im Leibnizarchiv in Hannover (LH 35, III B, f. 1—4).

[208] Siehe: J.E. HOFMANN (8) a.a.O., S. 431. HOFMANN gibt FR. DULAURENS als den ersten an, der diese Ansicht explizit äußerte (*Specimina mathematica*, Paris 1667).

LEIBNIZ löst zunächst die kubische Gleichung $x^3 \pm aqx - a^2 r = 0$, in der der sogenannte *Casus Irreducibilis* enthalten ist, durch den Ansatz $x = \sqrt[3]{d^2 e} \pm \sqrt[3]{d e^2}$. Beim Einsetzen müssen dann die Koeffizienten von $\sqrt[3]{d^2 e}, \sqrt[3]{d e^2}$ sowie das konstante Glied verschwinden. Aus diesen Bestimmungsgleichungen erhält er d und e als Funktion von a, q, r und damit *habebitur valor ipsius x irrationalibus iisdem expressus quas dedit Regula Cardani.*

Dann erläutert LEIBNIZ seine Methode bei Gleichungen höheren Grades:

Nam pro altioribus gradibus numerus irrationalium multiplicandus est. Verbi gratia pro quadrato-quadratico ponemus

$$x \sqcap \sqrt{④}\, d^3 e + \sqrt{④}\, d^2 e^2 + \sqrt{④}\, d e^3$$ [209]

ubi rursus neque in Quadrato, neque in Cubo, neque in Quadrato-quadrato ab x, neque in ulla alia altiore potestate ulla alia nova comparebit irrationalis, praeter has tres. Pro gradu quinto, ponemus

$$x \sqcap \sqrt{⑤}\, d^4 e + \sqrt{⑤}\, d^3 e^2 + \sqrt{⑤}\, d^2 e^3 + \sqrt{⑤}\, d e^4$$

et ita porro. Ubi vero sciendum posse has irrationales non tantum simpliciter assumi, sed et per quasdam irrationales multiplicatas auctasve poni aut minutas, verb. grat.

$$x \sqcap \frac{b}{a} \sqrt{③}\, d^2 e + \frac{c}{a} \sqrt{③}\, d e^2 + f$$

quin etiam loco b. c. d. e. f. adhiberi posse irrationales graduum inferiorum. Atque ita fieri possunt omnes combinationes possibiles, et determinabitur quicquid in hoc genere fieri potest cum antea investigatio radicum irrationalium ad certam quandam et generalem Analysin reducta non fuerit.

Nec est quod speret quispiam alias facile irrationalium formas adhiberi posse, quoniam certum est, quacumque alia ratione formentur, aut has esse palliatas aut inter operandum parere irrationales novas ex ductu ipsarum in se ipsas aut in se invicem, quas destruere postea non est in potestate, quod tamen necesse est, ut aequatio rationalis datae coincidenti ex ipsis excitari possit.

Setzt man im Ansatz von LEIBNIZ $d/e = y$, so behauptet LEIBNIZ die Lösung jeder Gleichung fünften Grades durch einen Ansatz

$$x = a_0 + a_1 y^{\frac{1}{5}} + \cdots + a_4 y^{\frac{4}{5}},$$

wobei y und die $a_\nu, \nu = 0, \ldots, 4$ algebraische Funktionen der Koeffizienten der Ausgangsgleichung sind. Die Bestimmungsgleichungen für y und die $a_\nu, \nu = 0, \ldots, 4$ erhält LEIBNIZ, indem er in die zu lösende Ausgangsgleichung einsetzt und die entstehenden Koeffizienten von $y^{\nu/5}$, $\nu = 0, \ldots, 4$ gleich Null setzt.

ABEL hat bei seinem Beweis von der Unmöglichkeit einer algebraischen Lösung der allgemeinen Gleichung von höherem als vierten Grad[210] mit ähnlichen Überlegungen gearbeitet. In seinem ersten Beweis von 1824 schreibt ABEL:

[209] Die von SIMON STEVIN stammende Schreibweise der Wurzelexponenten hat LEIBNIZ hier von VAN SCHOOTEN übernommen. Vergleiche dazu die *Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus* in dem in der *Geometria* DESCARTES' veröffentlichten *Additamentum* von FRANS VAN SCHOOTEN. $\sqcap$ ist das von LEIBNIZ verwendete Gleichheitszeichen.

[210] ABEL veröffentlichte einen ersten sehr kurzgefaßten Beweis in dem *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, Oslo 1824. Einen ausführlichen Beweis brachte ABEL in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 1826 unter dem Titel: *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré.*

Soit

$$y^5 - a y^4 + b y^3 - c y^2 + d y - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer y par une fonction des quantités a, b, c, d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et R, p, p_1, p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationelles des quantités a, b, c, d et e. On peut aussi supposer qu'il soit impossible d'exprimer $R^{1/m}$ par une fonction rationelle des quantités a, b etc., p, p_1, p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc,

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation proposée, on obtiendra en réduisant un résultat de cette forme,

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0,$$

q, q_1, q_2, etc. étant des fonctions rationelles et entières des quantités a, b, c, d, e, p, p_2 etc. et R. Pour que cette équation puisse avoir lieu il faut que $q = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ etc. $q_{m-1} = 0$.

Bis zu dieser Stelle laufen der Ansatz von LEIBNIZ und die (z.T. erst im zweiten Beweis von 1826) begründete Theorie ABELs ziemlich gleich. Während nun ABEL mit den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln nachweisen konnte, daß die durch diesen Radikalansatz lösbaren Gleichungen fünften Grades nicht alle denkbaren Gleichungen fünften Grades umfassen, d.h. nicht mit der allgemeinen Gleichung fünften Grades identisch sind, suchte LEIBNIZ die durch spezielle Radikalansätze lösbaren Gleichungen, z.B. die den durch Verallgemeinerung der (als für die kubische Gleichung allgemeingültig erkannten) Cardanischen Lösungsformel auf Wurzelexponenten > 3 gegebenen Radikaldarstellungen zugehörigen Gleichungen, d.h. er fand die Gleichungen, deren Wurzeln sich in der Form $z = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}$ (a, b reell) darstellen lassen.

LEIBNIZ gibt diese Gleichungen in der *Bisectio* mit dem fünften Grad beginnend an, da ja die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades als allgemein lösbar bereits bekannt waren.

(1)
$$\begin{aligned} r &= z^5 + 5pz^3 + 5p^2 z \\ &= z^6 + 6pz^4 + 9p^2 z^2 \\ &= z^7 + 7pz^5 + 14p^2 z^3 + 7p^3 z \\ &= z^8 + 8pz^6 + 20p^2 z^4 + 16p^3 z^2 \\ &= z^9 + 9pz^7 + 27p^2 z^5 + 30p^3 z^3 + 9p^4 z \\ &\quad - z^{10} + 10pz^8 + 35p^2 z^6 + 50p^3 z^4 + 25p^4 z^2 \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Leibniz entwickelt auch eine einer Rekursionsformel für die Koeffizienten entsprechende Tabelle in einer Bemerkung von Februar 1676. Er hofft zwar, einen größeren Bereich von Gleichungen durch geeignete Transformationen auf Gleichungen dieser Art zurückführen zu können, sieht aber doch ein:

tamen nullum esse gradum, dempto cubico in quo aequationes omnes ad formas has reduci possint. Et comperi radices generales quae ad resolutionem totius gradus quinti serviant, ex quinque aut minimum quatuor irrationalium aggregato constare. Quarum formam novi, et multas aequationes earum ope resolvere possum, et spero generalem reddere methodum, et efficere in surdesolidis [Gleichungen fünften Grades] quod in Cubicis jam habemus.

Leibniz kommt zu den Gleichungen (1), indem er zunächst $z = m \pm n$ setzt (daher *Bisectio Laterum*) und z^s für $s = 1, \ldots, 6$ als Polynom in z berechnet. Die Fallunterscheidung $m \pm n$ läßt sich umgehen, indem man $z = m - n$ mit m, n beliebig reell setzt.

Damit erhält man die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
z &= m - n \\
z^2 &= (m-n)^2 \\
z^3 &= m^3 - n^3 - 3mnz \\
z^4 &= (m^2 - n^2)^2 - 4mnz^2 \\
z^5 &= m^5 - n^5 - 5mnz^3 - 5m^2n^2z \\
z^6 &= (m^3 - n^3)^2 - 6mnz^4 - 9m^2n^2z^2.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Das Bildungsgesetz für die folgenden Gleichungen mit $s > 6$ ist für Leibniz durch diese Aufstellung hinreichend klar. Leibniz setzt nun $p = mn$ und für $s = 2t+1$, t natürlich, $r = m^s - n^s$, für $s = 2t$, $r = (m^t - n^t)^2$ und erhält damit aus (2) die Gleichungen (1).

Die Wurzeln z von (1) ergeben sich im Fall $s = 2t+1$ durch Bestimmung von m und n aus $r\,(= m^s - n^s)$ und $p\,(= mn)$ in der Form

$$z = \sqrt[s]{\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + p^s}} + \sqrt[s]{\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + p^s}}$$

und im Fall $s = 2t$ aus $r\,(= (m^t - n^t)^2)$ und $p\,(= mn)$ in der Form

$$z = \sqrt[t]{\sqrt{\frac{r}{4} + p^t} + \sqrt{\frac{r}{4}}} - \sqrt[t]{\sqrt{\frac{r}{4} + p^t} - \sqrt{\frac{r}{4}}}.$$

Für ungerade s ist das gerade die Verallgemeinerung der Cardanischen Lösungsformel

$$x = \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + p^3}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + p^3}}$$

für die reduzierte kubische Gleichung: $x^3 = r - 3px$.

Leibniz zeigt die Auflösung nur am Beispiel $s = 5$.

Leibniz bemerkt auch, daß sich die Gleichungen (1) durch eine geeignete Substitution auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen: *Adduco autem vel*

ideo, ut hinc appareat, non esse semper necessarium, ut tollantur gradus omnes medii inter primum et ultimum ad aequationes affectas reddendas puras ...

Ob LEIBNIZ von HUYGENS, dem er zu dieser Zeit seine algebraischen Arbeiten zur Begutachtung geschickt hatte, über den im Abschnitt 4.1. besprochenen FERMAT-Brief informiert worden ist, ist unbekannt[211].

LEIBNIZ hat im Gegensatz zu FERMAT negative und imaginäre Zahlen zugelassen und damit die Gültigkeit seiner Radikallösung auch im Falle der Winkelteilungsgleichung erkannt. Diesen Fortschritt macht die folgende Stelle der *Bisectio* deutlich:

Si Centro A (Fig. 1) *descriptus intelligatur arcus circuli BDC. Dataque sit subtensa arcus BDC, nempe BC, et ponendo arcum BD esse ad arcum BDC ut unitas ad quendam numerum y. tunc posito: radio* 1 *et BC* ⊓ *b et BD* ⊓ *x, fiet*

$$x \sqcap \sqrt[y]{\mp\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-1}}+\sqrt[y]{\mp\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-1}}\ ^{212}.$$

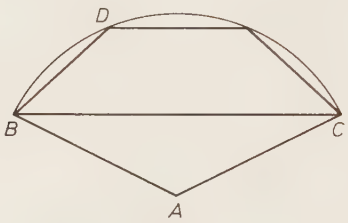

Fig. 1

Setzt man

$$\text{arcus } BD = \overline{AB}\cdot\alpha = \alpha$$
$$\text{arcus } BDC = \overline{AB}\cdot y\alpha = y\alpha,$$

dann ist

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{2}$$
$$\sin\frac{y\alpha}{2}=\frac{b}{2},$$

d.h. LEIBNIZ' Resultat ist äquivalent mit

$$2\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{y\alpha}{2}+i\cos\frac{y\alpha}{2}\right)^{1/y}+\left(\sin\frac{y\alpha}{2}-i\cos\frac{y\alpha}{2}\right)^{1/y}$$

oder

$$\sin\varphi=\tfrac{1}{2}(\sin y\varphi+i\cos y\varphi)^{1/y}+\tfrac{1}{2}(\sin y\varphi-i\cos y\varphi)^{1/y}.$$

[211] Die *Bisectio* wurde Juli 1675 abgefaßt, aber wie eine Bemerkung zeigt, Februar 1676 überarbeitet. Ob der Anhang, aus dem die zuletzt zitierte Bemerkung stammt, ebenfalls erst 1676 entstanden ist, kann nicht festgestellt werden.

Die folgenden Manuskripte und Briefe wurden in dieser Zeit mit HUYGENS gewechselt: Zunächst ein Manuskript von April 1675 für HUYGENS. Eine weitere Sendung ging im Sommer 1675 an HUYGENS. Es existiert ein Brief von LEIBNIZ an HUYGENS September (?) 1675 und HUYGENS' Antwort vom 30. 9. 1675 (n.S.) sowie ein Zusatzbrief HUYGENS vom 3(?). 10. 1675. (Für diese Aufzählung siehe J.E. HOFMANN (5) a.a.O.) In den HUYGENS-Antworten findet sich kein Hinweis auf FERMAT, aber es ist nicht auszuschließen, daß HUYGENS zwischen April und Juli 1675 geschrieben hat, und dieser Brief verlorengegangen ist.

[212] ∓ war als Zeichen dafür eingesetzt worden, daß eine Größe auch negative Werte annehmen kann, ± kennzeichnete LEIBNIZ in diesem Manuskript mit (+).

Leibniz war wohl auf diese Lösung gekommen, indem er in (1) $p = -R^2$, R Kreisradius, hier $= 1$ gesetzt hatte. Er hatte allerdings nicht bemerkt, daß die Winkelteilungsgleichungen für den Sinus nur für $y \equiv 1$ (4) mit (1) übereinstimmen.

Immerhin hat Leibniz hier bereits ein Ergebnis, das de Moivre mit der richtigen Einschränkung des Gültigkeitsbereichs im Jahre 1707 fand und publizierte[213].

Leibniz, der seine algebraischen Studien zugunsten der Analysis nach Huygens' Brief von September 1675 unterbrach[214], hat den Inhalt der Arbeit *De Bisectione Laterum* spätestens während seines zweiten Aufenthaltes in London 1676[215] Oldenburg zugänglich gemacht. Es existiert heute noch eine Abschrift für Oldenburg ebenso wie eine für Newton[216]. Es ist daher möglich, daß de Moivre von dieser Leibnizschen Arbeit[217] Kenntnis hatte.

4.3. De Moivres unmittelbare Vorgänger

In England hatte John Wallis (1616—1703) unter Benutzung der Ergebnisse in William Oughtreds (1574—1660) *Clavis* die Winkelteilungsgleichungen für $n = 2, \ldots, 7$ durch wiederholte Anwendung des *Ptolemäischen Lemmas*[218] aufgestellt. Wallis konnte von einer Wurzel ausgehend sämtliche n Wurzeln der Winkelteilungsgleichung n-ten Grades geometrisch bestimmen, d.h. zur Lösung $2 \sin \alpha$ die weiteren Lösungen

$$2 \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

hinzufügen[219].

Wallis, der ebenso wie Leibniz negative Zahlenwerte zuließ, hatte sich auch mit komplexen Zahlen und ihrer geometrischen Darstellung beschäftigt[220]. Sein Bestreben dabei war, den negativen und komplexen Zahlen eben durch ihre Darstellbarkeit etwas von ihrer *Unmöglichkeit* zu nehmen. Den von Wallis geäußerten Gedanken, $\sqrt{bc}$ durch den Höhensatz zu veranschaulichen, verwandte später

---

[213] Leibniz hat in einer Randnote zu dem im *Commercium Epistolicum* (1712/13) veröffentlichten Brief an Oldenburg vom 27. 8. 1676 auf den Zusammenhang zwischen seinen 1675 gefundenen Ergebnissen und der in den *PT* Nr. 309, 1707 veröffentlichten Arbeit de Moivres hingewiesen. Vergleiche J.E. Hofmann (5) a.a.O., S. 156.

[214] Über die psychologischen Gründe dieser Unterbrechung siehe J.E. Hofmann (5) a.a.O., S. 99.

[215] Leibniz war am 18. 10. 1676 (n.S.) in London angekommen und schon am 29. 10. wieder abgereist.

[216] Siehe J.E. Hofmann (5) a.a.O., S. 182.

[217] De Moivre selbst gibt keinen Hinweis auf eine Kenntnis der *Bisectio*.

[218] In einem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten gleich dem Produkt der Diagonalen.

[219] Diese Ergebnisse stehen in dem 1648 entstandenen Teil der Arbeit, die 1684 unter dem Titel *A Treatise of Angular Sections* in London erschien. Siehe Ch. J. Scriba a.a.O., S. 21—33.

[220] Diese Darstellung findet sich in Kapitel 66 der 1685 englisch und in den *Opera* II 1693 lateinisch veröffentlichten *Algebra*.

A. Q. BUÉE[221] zur Darstellung von $\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(+1)}$ und weiter aller komplexen Zahlen in der uns heute geläufigen Form.

Mit dem Winkelteilungsproblem beschäftigten sich auch JAMES GREGORY und ISAAC NEWTON, die beiden Entdecker der Potenzreihenmethode[222]. GREGORY sah in den Reihen eine universelle Methode zur Gleichungsauflösung. So schrieb er am 17. 1. 1672 (a. S.) an COLLINS[223]:

I am confident that the tables of logarithms and sines cannot resolve all equations, albeit they can very many, yet not without great preparations, so as a sursolid equation[224]*, which can be reduced to a pure one, must first ascend to the twentieth potestas, not without extraordinary work. The only universal method I know is the infinite serieses.*

Ebenfalls in einem Brief an COLLINS (23. 11. 1670 (a. S.))[225] entwickelte GREGORY mit seinem Interpolationsverfahren $\sin r\alpha$ (r rational) als Potenzreihe in e, wobei $e = d \sin\alpha(1 - \cos\alpha)$, d Kreisdurchmesser ist. NEWTON, der sich Ende 1664 (?) und im darauffolgenden Winter 1664/65 (?) intensiv mit den *Angulares Sectiones* VIÈTES auseinandergesetzt hatte[226], gab eine Darstellung von $2\sin\frac{n\alpha}{2}$ als Funktion von $2\sin\frac{\alpha}{2}$ für beliebige natürliche n in dem für LEIBNIZ bestimmten Brief an OLDENBURG vom 13. 6. 1676 (a. S.)[227]:

Si arcus capiendus sit in ratione data ad alium arcum: esto diameter d, chorda arcus dati = x, et arcus quaesitus ad arcum illum datum ut n ad 1, eritque arcus quaesiti chorda

$$= nx + \frac{1-nn}{2\cdot 3dd}\,xxA + \frac{9-nn}{4\cdot 5dd}\,xxB + \frac{25-nn}{6\cdot 7dd}\,xxC + \frac{36-nn}{8\cdot 9dd}\,xxD + \frac{49-nn}{10\cdot 11dd}\,xxE + etc.$$[228]

ubi nota, quod cum n est numerus impar, series desinet esse infinita, et evadet eadem, quae prodit per vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.

Auf dieses hier ohne Beweis übermittelte Ergebnis NEWTONS, das, setzt man statt d den Radius r und $\sin\alpha$ für x, in die Potenzreihenentwicklung in $\sin\alpha$ von

---

[221] Der Inhalt der am 20. 6. 1805 vor der ROYAL SOCIETY vorgetragenen Arbeit BUÉES wurde unter dem Titel *Mémoire sur les Quantités imaginaires* in den *PT* 1806, S. 23—88 veröffentlicht.

[222] Siehe dazu J. E. HOFMANN (4) a. a. O., S. 36.

[223] H. W. TURNBULL a. a. O., S. 210f.

[224] Gleichung fünften Grades.

[225] H. W. TURNBULL a. a. O., S. 127.

[226] Für die Anmerkungen NEWTONS zu den *Angulares Sectiones* VIÈTES und deren Datierung siehe NEWTON (5) a. a. O. I, S. 78—84 u. S. 476—480 bzw. S. 63 u. S. 476.

[227] Für die biliographischen Angaben zum Original und die diversen Abschriften und Abdrucke siehe Briefverzeichnis in J. E. HOFMANN (5) a. a. O. Die Briefstelle wurde nach C. J. GERHARDT, *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* I (einziger), Berlin 1899, S. 186, zitiert.

[228] In dieser Entwicklung bedeutet A das erste Glied nx, B das zweite Glied $\frac{1-n^2}{2\cdot 3d^2}\,x^2A = \frac{n\cdot(1-n^2)}{2\cdot 3d^2}\cdot x^3$ und allgemein der in der Darstellung eines Gliedes auftretende Großbuchstabe das ganze vorhergehende Glied. DE MOIVRE verwendet diese Schreibweise für Potenzreihen etwas modifiziert: Die Großbuchstaben kennzeichnen jeweils den ursprünglichen Koeffizienten des vorangehenden Gliedes.

$\sin n\alpha$ übergeht, bezog sich DE MOIVRE[229] in verschiedenen Arbeiten. Eine Ableitung veröffentlichte DE MOIVRE als Anwendung seines Polynomialtheorems[230].

In den *AE* hatte JOHANN I BERNOULLI 1700 die allgemeine Lösung des Problems der Winkelschnitte gefordert[231]. Ebenfalls in den *AE* veröffentlichte er 1701 seine Ergebnisse[232]:

Sit radius circuli $= 1$, *subtensa arcus dati* $= a$, *subtensa ejus complementi ad semicirculum* $= \sqrt{4 - a\,a}$ = *(brevitatis gratia)* b, *subtensa arcus multipli submultiplive* $= x$, *subtensa ejus complementi ad semicirculum* $= \sqrt{4 - x\,x}$ = *(brevitatis gratia)* y; *numerus multipli submultiplive* $= n$; *dico fore pro arcu multiplicando,*

$$x = a\,b^{n-1} - \frac{n-2}{1}\,a\,b^{n-3} + \frac{n-3,\,n-4}{1,\,2}\,a\,b^{n-5} - \frac{n-4,\,n-5,\,n-6}{1,\,2,\,3}\,a\,b^{n-7} + \frac{n-5,\,n-6,\,n-7,\,n-8}{1,\,2,\,3,\,4}\,a\,b^{n-9}\ \text{etc.}$$

et pro arcu dividendo seu secando $x =$ *radici hujus aequationis*

$$a = x\,y^{n-1} - \frac{n-2}{1}\,x\,y^{n-3} + \frac{n-3,\,n-4}{1,\,2}\,x\,y^{n-5} - \frac{n-4,\,n-5,\,n-6}{1,\,2,\,3}\,x\,y^{n-7} + \frac{n-5,\,n-6,\,n-7,\,n-8}{1,\,2,\,3,\,4}\,x\,y^{n-9}\ \text{etc.}$$

cujus progressionis natura per se manifesta est, et ex uniformitate facile patet quomodo sit continuanda; continuari autem debet, donec ad terminum perveniatur, cujus coefficiens abeat in nihilum; talis autem aliquis semper erit in progressione, cum ut hic supponitur, per n *denotetur numerus integer.*

Setzt man in die von JOHANN I BERNOULLI gegebenen Beziehungen für a als zum Winkel β gehöriger Sehne $2\sin\frac{\beta}{2}$ und $b = \sqrt{4 - a^2} = 2\cos\frac{\beta}{2}$, entsprechend $x = 2\sin\frac{n\beta}{2}$ und $y = 2\cos\frac{n\beta}{2}$ und außerdem $\beta = 2\alpha$, so erhält man:

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{\nu} \binom{n-\nu-1}{\nu} (2\cos\alpha)^{n-2\nu-1}.$$

Je nachdem ob es sich um eine Winkelvervielfältigung oder Winkelteilung handelt, ist $\sin\alpha$ oder $\sin n\alpha$ vorgegeben.

Übrigens hatte bereits VIÈTE im Theorem 7 seiner *Angulares Sectiones*[233] die der Darstellung von $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ als Funktion von $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ $(= 2\cos\alpha)$ entsprechenden Beziehungen für $n = 3$ bis 10 gegeben. Der Fortschritt gegenüber VIÈTE ist darin zu sehen, daß JOHANN I BERNOULLI eine Formel für allgemeines n formulierte, während VIÈTE, der zwar bereits die Formeln für beliebiges $n > 10$ entwickeln

---

[229] Der Brief NEWTONS an OLDENBURG vom 13. 6. 1676 (a. S.) war in dem 1699 erschienenen 3. Band der *Opera mathematica* des JOHN WALLIS vollständig und auszugsweise in WALLIS' *Algebra* (Fußnote 220) abgedruckt.

[230] Siehe *PT* Nr. 240, für Mai 1698 und Abschnitt 5.1.

[231] *AE*, Juni 1700, S. 268.

[232] *AE*, April 1701, S. 171f.

[233] VIÈTE, *Opera*, S. 296f.

konnte, sukzessive den einer Rekursionsformel gleichwertigen *Canon* für die Koeffizienten aufbauen mußte.

JOHANN I BERNOULLI gab in derselben Arbeit eine weitere Formel für Winkelvervielfältigung bzw. Teilung:

Dico itaque (retentis iisdem litteris, sed jam diametro sumpta pro unitate) haberi pro multiplicatione

$$x = n\,a\,b^{n-1} - \frac{n,\,n-1,\,n-2}{1,\,2,\,3}\,a^3\,b^{n-3} + \frac{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3,\,n-4}{1,\,2,\,3,\,4,\,5}\,a^5\,b^{n-5} - \frac{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3,\,n-4,\,n-5,\,n-6}{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7}\,a^7\,b^{n-7}\ \textit{etc.}$$

vel etiam, si magis arridet valor ipsius y, erit

$$y = b^n - \frac{n,\,n-1}{1,\,2}\,a^2\,b^{n-2} + \frac{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3}{1,\,2,\,3,\,4}\,a^4\,b^{n-4} - \frac{n,\,n-1,\,n-2,\,n-3,\,n-4,\,n-5}{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6}\,a^6\,b^{n-6}\ \textit{etc.}$$

Diese beiden Beziehungen entsprechen den durch Trennung in Imaginär- und Realteil aus der Gleichung $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^n$ ableitbaren Formeln für $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ [234].

JAKOB HERMANN brachte in den *AE* 1703 [235] Beweise für die von JOHANN veröffentlichten Ergebnisse. HERMANN verwies dabei auf die Arbeiten von OUGHTRED und WALLIS, meinte aber, daß deren Ergebnisse durch *Universalitate* derer JOHANNs umfaßt würden. HERMANN, der für die Beweise wesentlich das *Ptolemäische Lemma* benutzte, kündigte abschließend eine Publikation JAKOB BERNOULLIs über das Winkelteilungsproblem in den Pariser Akademieberichten an. In dieser Arbeit [236] berechnete JAKOB das Quadrat der Sehne des Winkels $n\alpha$ und des Winkels $(\pi - n\alpha)$ aus der Sehne des Winkels α (bzw. Bogens $r\alpha$) durch wiederholte Anwendung der Formel für das Quadrat der Sehne des doppelten Winkels — er erhielt damit die Quadrate der Sehnen der Winkel $2^\nu\alpha$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ — und anschließende Interpolation. Die Sehnen wurden aus ihren Quadraten entweder durch Ansatz in unbestimmten Koeffizienten, Quadrieren und Koeffizientenvergleich oder *par le moyen des interpolations de M. Wallis* [237] bestimmt. So erhielt JAKOB BERNOULLI $2 \sin n\beta$ [238] bzw. $2 \cos n\beta$, $\alpha = 2\beta$ als Potenzreihe in $2 \sin\beta$ oder $\sin\beta$. Er stellte fest, daß die Reihe für $2 \sin n\beta$ bei ungeradem n, die Reihe für $2 \cos n\beta$ bei geradem n abbricht, und konnte so die von

---

[234] Für die entsprechenden Ergebnisse bei VIÈTE siehe Abschnitt 4.1.

[235] *AE*, August 1703, S. 345—351.

[236] *Section indéfinie des arcs circulaires* in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences für 1702 (nach einem Brief JAKOB BERNOULLIs vom 13. 7. 1702 (n. S.)). Daß HERMANN in den *AE* von August 1703 eine Arbeit in den *Mémoires* der Pariser Akademie für das Jahr 1702 ankündigen kann, liegt an dem oft großen Unterschied zwischen Berichts- und Erscheinungsjahr bei den *Mémoires*.

[237] Siehe D. T. WHITESIDE (1) a. a. O., S. 236—241 und J. E. HOFMANN, *Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Genf 1956, S. 51.

[238] Er erhält damit gerade die Winkelteilungsreihe für den Sinus, die NEWTON im Brief an OLDENBURG vom 13. 6. 1676 (a. S.) für LEIBNIZ mitgeteilt hatte.

VIÈTE in Theorem 9 seiner *Angulares Sectiones*[239] aufgeführten speziellen Formeln für $n = 2$ bis 9 und das von VIÈTE angegebene, einer Rekursionsformel äquivalente Bildungsgesetz durch eine Formel für allgemeines natürliches n ersetzen. In einem P. S. formte JAKOB BERNOULLI die wiederholte Anwendung des *Ptolemäischen Lemmas* zur Herleitung der Sehne s_n des Winkels $n\alpha$ aus der Sehne $s_1 (= x)$ des Winkels α verbal zu einer Rekursionsformel um. JAKOB bildete das Sehnenviereck aus $s_1 (= x)$, s_{n-1}, s_1 und s_{n+1}, dessen Diagonalen dann s_n sein müssen, und kann dann aus der Beziehung $x^2 + s_{n-1} \cdot s_{n+1} = s_n^2$ die Rekursionsformel $s_{n+1} = \frac{s_n^2 - x^2}{s_{n-1}}$ ableiten.

Mit $s_1 = x$, $s_2 = x\sqrt{4 - x^2}$ beginnend lassen sich sukzessive alle weiteren s_n berechnen[240].

Einen direkten Anstoß zu seinen Arbeiten über Winkelteilungen erhielt DE MOIVRE durch JOHN MACHIN. Im Brief vom 8. 7. 1706 (a. S.) hatte DE MOIVRE JOHANN I BERNOULLI eine sehr schnell konvergierende Reihe für π als die Entdeckung eines jungen Engländers mitgeteilt[241]. Dieser junge Mann war JOHN MACHIN, der diese Reihe seinem Freund WILLIAM JONES zur Veröffentlichung in dessen *Synopsis palmariorum matheseos*[242] mit dem auf hundert Stellen genau berechneten π überlassen hatte. Wesentlich hatte MACHIN für seine Reihe die Darstellung von $\operatorname{tg} n\alpha$ durch $\operatorname{tg} \alpha$ benutzt[243].

---

[239] VIÈTE, *Opera*, S. 298—300.

[240] Sowohl HERMANN als auch JAKOB BERNOULLI haben aus ihren Formeln für die Sehnen des Winkels $n\alpha$ bei fest vorgegebenen $\gamma = n\alpha$ durch Grenzübergang $n \to \infty$ die Sehne als Funktion des Bogens bzw. $\sin x$ als Potenzreihe in x abgeleitet. Diese Potenzreihe für $\sin x$ hatten spätestens 1668 sowohl NIKOLAUS MERCATOR (1620—1687) als auch NEWTON zur Verfügung. Diese Entwicklung findet sich bereits in einem *Karaṇapaddhati* betitelten Sanskrittext, der nach einer Überlieferung aus dem Jahr 1431 stammt, mit Sicherheit aber nicht später entstanden ist, als der von NILAKAṆṬHA SOMASUTVAN (1465—1545) verfaßte *Tantasamgraha*, in dem dieselbe Reihe enthalten ist. Siehe AMULYA KUMAR BAG, *Trigonometrical Series in the Karaṇapaddhati and the Probabale Date of the Text*, Indian Journal of History of Science 1, 1966, S. 98—106.

[241] DE MOIVRE, der die Reihe ohne Beweis an JOHANN I. BERNOULLI geschickt hatte, bat diesen, sie an JAKOB HERMANN weiterzuleiten. HERMANN fand den Beweis für die Reihe sofort und teilte sein Ergebnis mit einer allgemeinen Methode zur Auffindung weiterer solcher Reihen LEIBNIZ im Brief vom 21. 8. 1706 (n. S.) mit; siehe GERHARDT, *G. W. Leibniz Mathematische Schriften* IV, S. 302—304.

[242] London 1706, S. 263. Vergleiche auch *BM* (3) 7, 1907, S. 305.

[243] Die Methode zur Konstruktion einer solchen schnell konvergenten Reihe für π bestand darin, eine positive rationale Zahl $p (= \operatorname{tg} \alpha)$, $p < 1$ und ein festes natürliches n zu finden mit $|\operatorname{tg} n\alpha - 1| \ll 1$. Da $\operatorname{tg} n\alpha (= q)$ für natürliche n eine rationale Funktion von $\operatorname{tg} \alpha (= p)$ ist, ist q ebenfalls eine rationale Zahl. Nun ist $\operatorname{tg}\left(n\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q-1}{q+1}$, $\frac{\pi}{4} = n\alpha - \operatorname{arctg} \frac{q-1}{q+1}$ und damit $\pi = 4n \operatorname{arctg} p - 4 \operatorname{arctg} \frac{q-1}{q+1}$. Die Arcustangensreihe war spätestens durch den Brief von JAMES GREGORY an COLLINS vom 15. 2. 1671 (a. S.) bekannt geworden. MACHIN benutzte die Werte $p = \frac{1}{5}$, $n = 4$ und kam damit zu der Reihe

$$\pi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{2\nu+1} \left(\frac{16}{5^{2\nu+1}} - \frac{4}{239^{2\nu+1}} \right).$$

JAKOB HERMANN gab noch eine den Werten $p = \frac{1}{2}$, $n = 2$ entsprechende Reihe an.

4.4. De Moivres Arbeiten im Zusammenhang mit der Lösung spezieller Gleichungen höheren als vierten Grades

4.4.1. Der Beweis der Machinschen Formel für tg $n\alpha$ als Ausgangspunkt

Im Brief vom 6. 7. 1708 (a. S.)[244] an JOHANN I BERNOULLI gab DE MOIVRE zwei Ableitungen für die MACHINsche Formel:

Soit t la tangente d'un arc de cercle; 1 le rayon. On sçait que

la tangente du double est $\dfrac{2t}{1-tt}$

la tangente du triple $\dfrac{3t-t^3}{1-3tt}$

la tangente du quadruple $\dfrac{4t-4t^3}{1-6tt+t^4}$

la tangente du quintuple $\dfrac{5t-10t^3+t^5}{1-10tt+5t^4}$

qu'il faille donc exprimer d'une manière générale la tangente d'un arc qui soit au premier dans la raison de n à 1[245].

Je vois d'abord que le 1^r *terme de chaque numérateur est* $n\cdot t$*; ensuite pour trouver le coefficient général qui convient à tous les seconds termes, je dispose vis à vis de chaque second terme le coefficient particulier qui lui convient, et je prens les différences, et les différences des différences jusqu'à ce qu'elles parviennent à l'égalité, et comme il m'est libre de commencer par quel nombre je voudrai, je commence par zéro, ce qui est toujours le plus simple.*

DE MOIVRE findet so für den Koeffizienten des zweiten Gliedes des Zählers durch Anwendung der von ihm gefundenen Extrapolationsformel[246] den Wert $\binom{n}{3}$. Analog geht DE MOIVRE bei den Koeffizienten der anderen Glieder in Zähler und Nenner vor und kommt zu dem Äquivalent der Formel:

$$\operatorname{tg} n x = \frac{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu+1} \operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{2\nu} \operatorname{tg}^{2\nu} x}.$$

DE MOIVRE gibt für die einzelnen Koeffizienten der Polynome in tg x des Zählers und Nenners eine formale Deduktion, deren Voraussetzung, daß diese Koeffizienten von tg x für jedes n ein und derselben arithmetischen Reihe einer bestimmten Ordnung gehören, für DE MOIVRE durch ein Induktionsgefühl erwiesen ist. Das Prinzip der vollständigen Induktion zum exakten Nachweis einer Formel für

[244] Dieser Brief steht in WOLLENSCHLÄGER a. a. O., S. 241—257.

[245] Die dieser Aufstellung für tg $n\alpha$, $n=2$ bis 5 entsprechende für ctg $n\alpha$, $n=2$ bis 7 mit dem Bildungsgesetz zur Fortsetzung für $n>7$ bringt VIÈTE im Theorem III der *Angulares Sectiones;* vergleiche 4.1.

[246] Diese Formel findet sich bereits in der 1668 veröffentlichten *Logarithmotechnia* NICOLAUS MERCATORS, allerdings mit der Nebenbedingung, daß die Glieder der zu extrapolierenden Reihe Brüche sind, deren Zähler und Nenner jeweils Glieder einer arithmetischen Reihe darstellen. Vergleiche J. E. HOFMANN (2) a. a. O., S. 449—451.

natürliches n war zwar bereits gefunden[247], aber nicht bekannt; es fehlte damals noch weitgehend am Verständnis für die Notwendigkeit eines solchen Prinzips.

Moivre hat in demselben Brief an Johann I Bernoulli eine weitere Methode zum Nachweis der Machinschen Formel gegeben:

Soit t la tangente d'un arc et T la tangente d'un arc qui soit au premier comme n à 1. La différence des arcs sera

donc $\dfrac{\dot{t}}{1+tt}$ *et* $\dfrac{\dot{T}}{1+TT}$ [248]

donc $\dfrac{n\dot{t}}{1+tt} = \dfrac{\dot{T}}{1+TT}$

soit $t = x\sqrt{-1}$ *et* $T = y\sqrt{-1}$

donc $\dfrac{n\cdot\dot{x}}{1-xx} = \dfrac{\dot{y}}{1-yy}$ *ou* $\dfrac{2n\dot{x}}{1-xx} = \dfrac{2\dot{y}}{1-yy}$

mais $\dfrac{2\dot{x}}{1-xx}$ *est la différence du logarithme de* $\dfrac{1+x}{1-x}$,

et $\dfrac{2\dot{y}}{1-yy}$ *est la différence du logarithme de* $\dfrac{1+y}{1-y}$,

donc $\dfrac{(1+x)^n}{(1-x)^n} = \dfrac{1+y}{1-y}$ [249].

Aus diesem letzten Ergebnis leitet de Moivre, indem er x durch $t/\sqrt{-1}$ und y durch $T/\sqrt{-1}$ ersetzt und binomial entwickelt, die Machinsche Formel ab. Implizit steckt in dieser von de Moivre gegebenen Ableitung bereits die Identität $-i\alpha = \ln(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ [250].

---

[247] Das Prinzip der vollständigen Induktion wurde von Blaise Pascal in dessen *Traité du Triangle arithmétique* (1654 gedruckt, aber nicht veröffentlicht) wahrscheinlich zum ersten Mal explizit formuliert und angewendet. Sehr einfache Beispiele einer Anwendung der vollständigen Induktion finden sich schon verschiedentlich in der Antike, bei Levi ben Gerson (1288—1344) und Francesco Maurolico (1494 bis 1575). Vergleiche H. Freudenthal (1) a.a.O. Für Jakob Bernoullis von Pascal unabhängige Entdeckung des Prinzips siehe dessen *Demonstratio rationum* ... in den *AE*, Juli 1686, S. 360f; vergleiche K.-R. Biermann (2) a.a.O., S. 234f.

[248] Setzt man den *arc* $= \alpha r$, dann ist die *tangente* $t = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$, und mit $r = 1$ ist $\mathrm{tg}\,\alpha = t$ oder $\alpha = \mathrm{arctg}\,t$. Ist $\alpha = \alpha(s)$, $t = t(s)$, dann ist

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{t}}{1+t^2}.$$

[249] Zunächst ist $\dfrac{d}{ds}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2\dot{x}}{1-x^2}$.
Die Integrationskonstante bei der Integration von $\dfrac{2n\dot{x}}{1-x^2} = \dfrac{2\dot{y}}{1-y^2}$ verschwindet, da mit t bzw. $x = 0$ zugleich T bzw. $y = 0$.

[250] De Moivres Rechengang entspricht dem folgenden:

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{i}{1-x^2}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{i}{2}\,\frac{d}{ds}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{i}{2}\,\frac{d}{ds}\ln\frac{1-it}{1+it}$$
$$= \frac{i}{2}\,\frac{d}{ds}\ln\frac{1-it^2}{1+t^2} = i\,\frac{d}{ds}\ln(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

und damit $-i\alpha = \ln(\cos\alpha - i\sin\alpha)$.

ROGER COTES, der in seiner 1714[251] veröffentlichten *Logometria* explizit $i\alpha = \ln(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ feststellte[252], kann mittelbar durch DE MOIVRES zweite Ableitung der MACHINschen Formel beeinflußt worden sein, da JOHANN I BERNOULLI 1712 die ihm von DE MOIVRE mitgeteilte Ableitung der MACHINschen Formel ohne DE MOIVRE auch nur zu erwähnen, formal leicht verändert in den *AE*[253] publiziert hatte.

Über den Anwendungsbereich seiner Methode sowie die Anregung, die er durch eine Arbeit JOHANN I BERNOULLIS erhalten hatte, äußerte sich DE MOIVRE im Brief vom 6. 7. 1708 (a. S.):

> *Je ne sçais si M. de Magneville vous aura envoyé selon que je l'en avois prié, les solutions de certaines équations qui ont la forme de celles qui résultent de la triplication, quintuplication etc. des arcs circulaires ou des aires hyperboliques. Ces expressions étoient semblables à celles de Cardan pour les équations cubiques. Si vous les avez vues il vous aura été facile de juger que je les avois déduites de cette manière-ci du calcul différentiel, mais je crois qu'il y aura eu peu de personnes qui en ayent découvert le principe, quoique d'ailleurs la démonstration en soit assez facile. Dans le temps que je recherchai ceci, il me souvint confusément qu'un jour en feuilletant des Actes de Leipzic il se trouva sous ma main quelque chose qui regardoit les logarithmiques imaginaires; je crois, M. que c'étoit de vous; mais je n'eus pas le loisir d'y faire*

---

[251] *PT* Nr. 338 für Januar/März 1714, S. 32 und in der posthum erschienenen *Harmonia Mensurarum*, hrsg. von ROBERT SMITH, Cambridge 1722, S. 28.

[252] *Nam si quadrantis circuli quilibet arcus, radio CE descriptus, sinum habeat CX sinumque complementi ad quadrantem XE: sumendo radium CE pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ et CE mensura ducta in $\sqrt{-1}$.*

Die *Mensura* eines Verhältnisses $\frac{a}{b}$ wird von COTES durch die Funktionalgleichung $f\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] = nf\left(\frac{a}{b}\right)$ mit dem Zusatz $f\left(\frac{a}{a}\right) = 0$ eingeführt. Diese Funktionalgleichung ist äquivalent mit der Folgenden $f\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right] = f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right)$, die COTES stillschweigend mitverwendet. Für ein beliebiges Verhältnis $0 < \frac{p}{q} + 1$, *quae commodissima videtur*, wird $f\left(\frac{p}{q}\right)$ als *Modulus M* eingeführt. Sei nun $a > b$ und $a - b = n\Delta x$, dann ist

$$\frac{a}{b} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{a-(\nu-1)\Delta x}{a-\nu\Delta x} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} f\,\frac{a-(\nu-1)\Delta x}{a-\nu\Delta x}.$$

Für $n \to \infty$ setzt COTES $f\,\frac{a-(\nu-1)\Delta x}{a-\nu\Delta x} = M\,\frac{\Delta x}{a-\nu\Delta x}$.
In moderner Schreibweise erhält man so:

$$\textit{Mensura}\ \frac{a}{b} = f\left(\frac{a}{b}\right) = \lim_{n\to\infty} M \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\frac{a-b}{n}}{a-\nu\cdot\frac{a-b}{n}} = M \cdot \int_b^a \frac{dx}{x} = M \cdot \ln\frac{a}{b}.$$

Das so konstruierte f genügt der Funktionalgleichung. Vergleiche dazu: J. E. HOFMANN (3) a. a. O., S. 368f.

Damit bedeutet obige Aussage (sieht man von dem Vorzeichenfehler COTES' ab) mit

$$M = CE = r, \quad \text{arcus} = r\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{EX}{CE}, \quad \sin\alpha = \frac{XC}{CE}$$

folgendes:

$$r\alpha = -i\cdot r\cdot\ln(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{oder} \quad i\alpha = \ln(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

[253] *AE* Juni, Juli 1712, S. 274—277 und 329f.

attention alors, étant fort pressé, cependant cela me repassa plusieurs fois dans l'ésprit, mais je ne pus jamais deviner ce que cela pouvoit signifier jusqu'à ce que m'étant mis à cette recherche je pensai que j'avois eu le bonheur d'entrer dans votre idée, et que vos logarithmiques imaginaires étoient derivées d'une supposition d'une grandeur réelle égale à une imaginaire.

De Moivre verweist Johann I Bernoulli auf seine 1707 veröffentlichte Arbeit über spezielle Gleichungen derselben Form wie die aus der Verdreifachung, Verfünffachung usw. von Kreisbögen oder Hyperbelflächen resultierenden. Seine Transformationen vom Reellen ins Imaginäre hatte er einer Arbeit Johann I Bernoullis in den *AE* von 1703 entnommen[254]. Dort hatte Johann nach einigen Beispielen solcher Transformationen und der Einführung von Logarithmen mit imaginären Argument abschließend festgestellt:

... patet utique logarithmos seu Sectores hyperbolicos imaginarios sumi debere pro sectoribus realibus. Hos enim in unam summam colligendo quantitates imaginariae per mutuam compensationem se destruunt, ita ut nil nisi reale proveniat.

4.4.2. De Moivre über Winkelteilungs- und damit verwandte Gleichungen

Der Hinweis de Moivres im Brief an Johann I Bernoulli vom 6. 7. 1708 (a. S.) galt der in den *PT* Nr. 309, 1707 veröffentlichten Arbeit über *die analytische Lösung spezieller Gleichungen beliebig hohen ungeraden Grades analog der als Cardanisch bezeichneten Lösungsformel für die kubischen Gleichungen.*

Hier heißt es:

Sit n Numerus quicumque, y quantitas incognita, sive Aequationis Radix quaesita, sitque a quantitas quaevis omnino cognita, sive ut vocant Homogeneum Comparationis[255]*: Atque horum inter se relatio exprimatur per Aequationem*

$$n\,y + \frac{nn-1}{2\cdot 3}\,n\,y^3 + \frac{nn-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{nn-9}{4\cdot 5}\,n\,y^5 + \frac{nn-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{nn-9}{4\cdot 5}\cdot\frac{nn-25}{6\cdot 7}\,n\,y^7,$$
$$etc. = a \quad [A][256].$$

Ex hujus seriei natura manifestum est, quod si n sumatur numerus aliquis impar (integer scilicet, nec refert utrum sit affirmativus vel negativus) tunc series sponte sua terminabitur, et Aequatio sit una ex supra praefinitis, cujus Radix est

(1) $$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$$

vel (2) $$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

vel (3) $$y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}$$

vel (4) $$y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a}} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}.$$

[254] Diese Arbeit schloß sich an den zweiten Teil einer Publikation von Leibniz über Partialbruchzerlegung als *Problema exhibitum a Jo. Bernoullio* an. Die hier interessierenden Stellen finden sich *AE*, Januar 1703, S. 30f. Dieselbe Arbeit erschien später etwas erweitert in den *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences* für das Jahr 1702, S. 385—397.

[255] Vergleiche Christian Wolf, *Mathematisches Lexicon*, Leipzig 1716, Spalte 707. Das Fachwort *Homogeneum comparationis* wurde von Viète eingeführt.

[256] Hier wurde bei der Übertragung statt des von de Moivre benutzten × für die Multiplikation ein Punkt gesetzt.

Es handelt sich bei diesen vier Formen lediglich um die vier Möglichkeiten die Wurzel:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}-a}$$

im Rahmen der Identität

$$\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}+a}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}-a} = 1$$

verschieden darzustellen. Dieses Ergebnis erläutert DE MOIVRE an einigen Beispielen und fährt dann fort:

Atque praeterea, si in Aequatione praecedenti signa alternatim sint affirmantia et negantia, vel quod eodem redit, si series obvenerit hujus modi

$$n\,y + \frac{1-nn}{2\cdot 3}\,n\,y^3 + \frac{1-nn}{2\cdot 3}\cdot\frac{9-nn}{4\cdot 5}\,n\,y^5 + \frac{1-nn}{2\cdot 3}\cdot\frac{9-nn}{4\cdot 5}\cdot\frac{25-nn}{6\cdot 7}\,n\,y^7, \quad etc. = a \qquad [B]$$

erit hujus Radix ....

Wiederum gibt DE MOIVRE vier Darstellungen der Wurzel, die alle im obigen Sinne identisch mit

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

sind.

DE MOIVRE macht hier noch eine Fallunterscheidung: *Hic autem Notandum, quod si* $\frac{n-1}{2}$ *numerus extiterit impar, Radicis inventae signum in ei contrarium permutandum est.* Obige Wurzel soll also negativ genommen werden für $n \equiv 3\,(4)$ und positiv für $n \equiv 1\,(4)$. Wieder bringt DE MOIVRE einige Zahlenbeispiele. Im ersten ist $a = 6$, im zweiten $\frac{61}{64}$. Dieses Beispiel ist das einzige in der Arbeit, das einen Hinweis auf die Herkunft der in der Arbeit gelösten Gleichungen gibt:

Verum si acciderit ut a sit minor unitate, tunc Radicis forma secunda[257]*, ut quae proposito est magis conveniens, prae reliquis seligenda est. Sic si Aequatio fuerit* $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$*, erit*

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}+\sqrt{\frac{-375}{4096}}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}-\sqrt{\frac{-375}{4096}}}.$$

Et quidem si Binomialium Radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit Radix proba et possibilis, etsi expressio ipsa impossibilitatem mentiatur. Binominalis $\frac{61}{64}+\sqrt{\frac{-375}{4096}}$ *Radix quintana est* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-15}$*, et Binomialis* $\frac{61}{64}-\sqrt{\frac{-375}{4096}}$ *Radix itidem quintana est* $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-15}$*, quorum Binomialium semisumma* $= \frac{1}{4} = y$.

Si autem extractio ista vel non peragi posset, vel etiam difficilior videretur, res ubique confici potest per Tabulam sinuum naturalium ad modum sequentem. Ad Radium 1 sit $a = \frac{61}{64} = 0.95112$ *sinus arcus cujusdam, qui proinde erit* 72°:23′ [: entspricht hier einem Komma] *cujus pars quinta (eo quod* $n = 5$*) est* 14°:28′*; hujus sinus* $0.24981 = \frac{1}{4}$ *proxime. Nec secus procedendum in Aequationibus graduum superiorum.*

Für DE MOIVRE ist evident, daß die n-te Wurzel einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl ist. Das letzte Beispiel zeigt auch, daß beim zweiten Glei-

[257] Die von mir allein angegebene Form.

chungstyp für $|a| \leqq 1$, $a (= \sin n\alpha)$ die Wurzel $y = \sin \alpha$ bedingt, d.h. daß der zweite Gleichungstyp im Falle $|a| \leqq 1$ die Winkelteilungsgleichungen für den Sinus darstellt.

Geht man nun analog der zweiten Ableitung der Machinschen Formel für $\operatorname{tg} n x$, die de Moivre im Brief an Johann I Bernoulli vom 6. 7. 1708 (a. S.) mitgeteilt hatte, vor, so erhält man ausgehend von $\sin x = y$, $\sin n x = a$ durch ein dem im Brief analoges Verfahren zunächst die Differentialgleichung:

$$\frac{n\dot{y}}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{1-a^2}} \quad {}^{257a}$$

und nach der Transformation

$$y = it, \qquad a = iT; \qquad \frac{n\dot{t}}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\dot{T}}{\sqrt{1+T^2}}.$$

Diese Differentialgleichung führt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung: für $t = 0$ ist $T = 0$, zu der Gleichung[258]

$$(\sqrt{1+t^2}+t)^n = (\sqrt{1+T^2}+T)$$

oder

$$(\sqrt{1-y^2}-iy)^n = \sqrt{1-a^2}-ia \quad [C].$$

Die Gleichung [C] ist der eigentliche Ausgangspunkt. Zunächst ist [C] als eine Beziehung zwischen $\sin n x$ und $\sin x$ (nämlich $(\sqrt{1-\sin^2 x}-i \sin x)^n = \sqrt{1-\sin^2 n x} - i \sin n x$) deduziert worden; [C] kann aber auch unabhängig von diesem Ausgangspunkt betrachtet werden und führt auch für $|a| > 1$ durch Auflösung nach a formal zur Ausgangsgleichung [B]; d.h. [B] umfaßt mehr als nur die Winkelteilungsgleichungen ungeraden Grades. Umgekehrt kommt man durch Auflösung von [C] nach y zu einer (bzw. auch den) Wurzel(n) der Gleichung [B].

Bei der Auflösung von [C] nach a erhält man nach einigen Umformungen:

$$a = ny + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu y^{2\nu+1} \cdot \frac{n}{(2\nu+1)!} \cdot \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (n^2-(2\mu+1)^2)$$

d.h. [B], wobei diese Potenzreihenentwicklung von a in y bei ungeradem n, wie es de Moivre voraussetzt, abbricht.

Für y errechnet man aus [C]:

$$y = -\tfrac{1}{2}\left[i^{\frac{1-n}{n}} (\sqrt{a^2-1}-a)^{\frac{1}{n}} + i^{\frac{n-1}{n}} (\sqrt{a^2-1}-a)^{-\frac{1}{n}}\right].$$

Daraus erhält man wie de Moivre für $n \equiv 1\,(4)$ als eine Wurzel:

$$y = \tfrac{1}{2}\left[(\sqrt{a^2-1}+a)^{\frac{1}{n}} + (\sqrt{a^2-1}+a)^{-\frac{1}{n}}\right]$$

und für $n \equiv 3\,(4)$ dieselbe Lösung mit negativen Vorzeichen.

257a Dieselbe Differentialgleichung steht im Brief Johann I Bernoulli an Leibniz; Leibniz (6) a.a.O. III, S. 186.

258 In den *PT* Nr. 278 für März/April 1702, S. 1122 hatte de Moivre das Integral von $(r^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ als Hyperbelfläche angegeben.

Mit dieser Rekonstruktion, die durch den Brief vom 6. 7. 1708 (a. S.) und das letzte Beispiel in den *PT* für die Auflösung von [B] motiviert ist, sind der Gleichungstyp [B] und die von DE MOIVRE 1707 angegebenen Wurzeln vollkommen erklärt.

Den Übergang von [B] zu [A] erreicht man durch die Transformation $y = -iy'$ und $a = -ia'$.

Eine andere Darstellung gibt DE MOIVRE in den *MA* von 1730, die er mit dem folgenden Ergebnis beginnt[259]:

Si sint l et x Cosinus Arcuum duorum A et B, quorum uterque eodem Radio 1 describatur, quorumque prior sit posterioris multiplex in ea ratione quam habet numerus n ad Unitatem, tunc erit

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{\frac{1}{n}} + \tfrac{1}{2}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{-\frac{1}{n}}.$$

Für den Beweis dieser Gleichung verwendet DE MOIVRE die Überlegungen, die zur Gleichung [A] und ihrer Lösung von 1707 geführt hatten.

Ausgehend von der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ bzw. $\xi\cdot\eta = \frac{1}{2}$ und der Bedingung: n-mal Hyperbelsektor ACE gleich Hyperbelsektor ACH (Fig. 2), erklärt DE MOIVRE[260]:

Tunc nominatis DE y; et HG v; inveneram Fluxionem sectoris ACE esse $\frac{\frac{1}{2}\dot{y}}{\sqrt{1+yy}}$ *et Fluxionem sectoris ACH* $\frac{\frac{1}{2}\dot{v}}{\sqrt{1+vv}}$ *unde orietur proportio* $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+yy}}, \frac{\dot{v}}{\sqrt{1+vv}} :: 1, n,$ [261] *e qua per Methodum serierum deduxeram Aequationem*

$$v = ny + \frac{nn-1}{2\cdot 3}y^3A + \frac{nn-9}{4\cdot 5}y^5B + \frac{nn-25}{6\cdot 7}y^7C \text{ etc.}$$ [228].

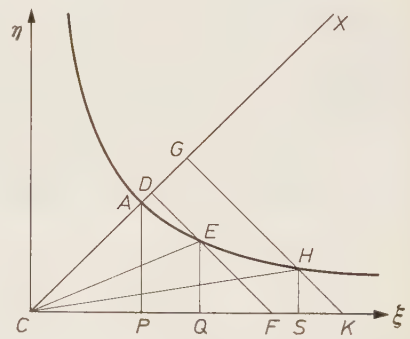

Fig. 2

Aus $\frac{n\dot{y}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\dot{v}}{\sqrt{1+v^2}}$ hatte DE MOIVRE durch Reihenansatz und Koeffizientenvergleich [A] abgeleitet.

---

[259] *MA*, S. 1, Lemma I.

[260] *MA*, S. 14—17.

[261] Hyperbelsektor $ACE = \int_0^y \sqrt{1+t^2}\,dt - \frac{y\sqrt{1+y^2}}{2}$

und $\frac{d}{ds}(\text{Hyperbelsektor } ACE) = \frac{\frac{1}{2}\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1+y^2}}$; die von DE MOIVRE verwendete Schreibweise $a, b :: c, d$ bedeutet in heutiger Form $a:b = c:d$.

Unter Benutzung der Gleichheit von Hyperbelsektor ACE und Hyperbelfläche $APQE$ kommt DE MOIVRE zu

$$n \cdot \int_{CP}^{CQ} \frac{1}{2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{CP}^{CS} \frac{1}{2} \frac{d\xi}{\xi}$$

oder

$$n \ln \frac{CQ}{CP} = \ln \frac{CS}{CP}$$

oder

$$n \ln \frac{AP}{QE} = \ln \frac{AP}{SH}$$

oder

$$n \ln \frac{1}{EF} = \ln \frac{1}{HK} .$$

Die letzte Beziehung wandelt DE MOIVRE, da *proindeque esse* $EF^n = HK$, *sed ex eo quod fuerat DE dicta* y, *et* GH, v; *facili calculo elicui* $EF = \sqrt{1+yy} - y$, *et* $HK = \sqrt{1+vv} - v$; zu $(\sqrt{1+y^2} - y)^n = \sqrt{1+v^2} - v$ um. Aus dieser letzten Gleichung hatte DE MOIVRE seine Wurzel y von [A] deduziert. Er geht nun zum Beweis seiner Formel für den Kosinus über:

Jam vero ut experirer num posset Formula superior, mutatis mutandis, ad Aequationem Newtonianam transferri, posui ut ante $\sqrt{1+vv} - v = s$, *sive* $ss + 2sv = 1$, *posui etiam* $\sqrt{1+yy} - y = z$, *sive* $zz + 2zy = 1$. *jam ex supra demonstratis, est* $s = z^n$, *adeoque substituto* z^n *in locum quantitatis* s, *habui has binas Aequationes, nimirum*

$$z^{2n} + 2z^n v = 1$$

$$zz + 2zy = 1$$

Sive

$$vv = \frac{1 - 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

et

$$yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz} .$$

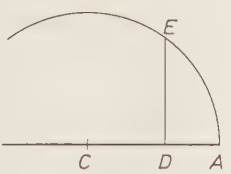

Fig. 3

Quapropter, cum Centro C, Radio $CA = 1$ *(Fig. 3) descripsissem Circulum AE, tum e puncto E demisissem ED perpendicularem in Radium, id mihi facile venit in mentem, quod cum Aequatio ad Circulum sit* $CAq - CDq = DEq$, *sive* $CDq - CAq = -DEq$, *Aequatio vera ad Hyperbolam aequilateram sit* $CDq - CAq = +DEq$ *nihil aliud faciendum mihi incumberet quam ut signa mutarem quadratorum* vv *et* yy, *quod cum factum fuisset, habui Aequationes binas ad circulum, has scilicet*

$$-vv = \frac{1 - 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

et

$$-yy = \frac{1 - 2zz + z^4}{4zz}$$

sive

$$1 - vv = \frac{1 + 2z^{2n} + z^{4n}}{4z^{2n}}$$

et

$$1 - yy = \frac{1 + 2zz + z^4}{4zz}$$

in quibus v designat sinum rectum Arcus cujuscunque, et y sinum rectum Arcus alterius qui sit in ea ratione ad priorem ut 1 ad n. Positis jam $1-vv=ll$ *et* $1-yy=xx$ *habui ...*

$$l=-\frac{1+z^{2n}}{2z^n}$$

et

$$x=\frac{1+zz}{2z}$$ [262] *Aequationes ad Cosinus.*

Ex priore novissimarum Aequationum deduxeram $z=\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}$ *ex posteriore vero* $x=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{1}{2}z$ *sicque demum concluseram esse*

$$x=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{ll-1}}.$$

Damit hat DE MOIVRE die zu Anfang der *MA* behauptete Formel für den Kosinus bewiesen. Er fährt fort: *sed cum mihi constaret Aequationes ad Sinus rectos sub eadem forma exhibitum iri ac Aequationes ad Cosinus, ubi est n numerus impar;* und wiederholt die 1707 veröffentlichten Ergebnisse zu [B]. Die folgenden Sätze können als Bestätigung für die Rekonstruktion der Ableitung von [B] angesehen werden:

Quamquam vero valor quantitatis y prodeat sub forma imaginaria, cum ad Sinus Arcuum restringitur, attamen hanc expressionem valoris y non ut inutilem judicaveram, utpote quae ad casus alios posset transferri, nempe si ita accideret ut v foret unitate major.

In der Arbeit von 1707 hatte DE MOIVRE nur jeweils eine Wurzel der Gleichungen [A] und [B] angegeben. Auf die weiteren Wurzeln von [B] kam DE MOIVRE durch das in der *Harmonia Mensurarum* veröffentlichte Theorem von COTES[263]. In den *MA* schreibt DE MOIVRE dazu[264]:

Hae autem conclusiones[265] *prodierant absque demonstratione in Actis Philosophicis pro mensibus Jan. Feb. et Mart. Anni 1707. ex quo tempore eas prorsus neglexeram, donec a me resumptae essent occasione data ex Cl. Cotesii Libro, ubi is primum lucem videre coepit: etenim cum inter plurima admiratione digna illic reperienda, notabilem obtineat locum Theorema quoddam de divisione Circuli ab eximio illo Mathematico inventum sed non demonstratum ...*

COTES' Theorem lautet[266]:

Si quaerantur Factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, *existente indice* λ *quolibet integro: dividatur Circumferentia ABCD, cujus centrum O in totidem partes aequales quot sunt unitates in* 2λ; *et ab omnibus divisionibus ad punctum quodvis P in OA radio, si opus sit situm, ducantur rectae, AP, BP, CP, DP, EP, FP etc.; deinde positis* $OA=a$, $OP=x$, *contentum sub omnibus AP, CP, EP etc. sumptis a divisionibus alternis per integrum circuitum, adaequabit* $a^\lambda-x^\lambda$, *vel* $x^\lambda-a^\lambda$, *pro ut P fuerit intra vel extra circulum, et contentum sub reliquis BP, DP, FP etc. in locis reliquis alternis adaequabit* $a^\lambda+x^\lambda$.

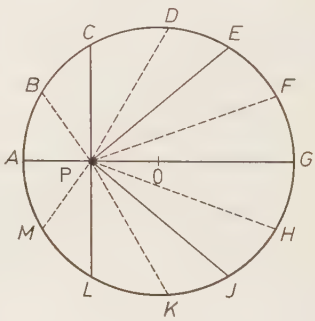

Fig. 4

[262] Vergleiche FERMATS Substitution in 4.1. und Fußnote 203.

[263] *Harmonia Mensurarum*, S. 113f.

[264] Ebenda S. 17.

[265] Damit war die Lösung von (B) in den *PT* von 1707 mit der Fallunterscheidung $n\equiv 1\,(4)$ und $n\equiv 3\,(4)$ gemeint.

[266] DE MOIVRE zitiert in den *MA*, S. 17f. das Theorem wörtlich nach der *Harmonia Mensurarum*, S. 113f.

Diese von Cotes ohne Beweis in geometrischer Form gegebene Zerlegung von $(a^\lambda \pm x^\lambda)^2$ in quadratische Faktoren regte de Moivre zu einer in den *PT* für 1722 veröffentlichten Arbeit über Winkelteilung an[267]. Nach einer sehr kurzen Darstellung der Ergebnisse von 1707 heißt es dort:

Jam quibus perspectum erit quo artificio Formulae istae inventae fuerint, his procul dubio patebit aditus ad demonstrationem sequentis Theorematis. Sit x Sinus Versus[268] *Arcus cujuslibet*

t *Sinus Arcus alterius*

1 *Radius Circuli.*

Sitque Arcus prior ad posteriorem ut 1 *ad n, Tunc, assumptis binis Aequationibus quas cognatas appellare licet,*

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t$$
$$1-2z+zz=-2zx.$$

Expunctoque z, orietur Aequatio qua Relatio inter x et t determinatur.

Geht man von der auf der ersten Seite der *MA* angegebenen Beziehung zwischen $\cos n\alpha\,(=l)$ und $\cos\alpha\,(=y)$ in der Form

$$y=\tfrac{1}{2}\,(l+\sqrt{l^2-1})^{\frac{1}{n}}+\tfrac{1}{2}\,(l+\sqrt{l^2-1})^{-\frac{1}{n}}$$

die de Moivre bereits 1707 kannte, aus und setzt $l+\sqrt{l^2-1}=z^n$ (d.h. $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$), dann erhält man mit $1-l=t\,(=\mathrm{sinv}\,n\alpha)$[268] und $1-y=x\,(=\mathrm{sinv}\,\alpha)$ gerade die von de Moivre angegebenen Gleichungen, *die man als bekannt bezeichnen kann.*

Als ersten Fall betrachtet de Moivre $n\alpha=\pi\,(+2k\pi)$. In diesem Fall ist $t=1-\cos n\alpha=2$, und die beiden Gleichungen haben die Form

$$1+z^n=0$$
$$1-2z+zz=-2zx$$

wozu de Moivre bemerkt:

e quibus si expungatur z, orietur Aequatio qua determinantur Sinus Versi Arcuum qui sint ad Semicircumferentiam, semel, ter, quinquies, etc. sumptam, ut 1 *ad n.*

Eliminiert man aus diesen Gleichungen z, so entsteht eine Gleichung zwischen t und x, deren sämtliche Wurzeln x gerade die verschiedenen Sinus Versus der Winkel α mit $n\alpha=\pi+2k\pi$ oder $\alpha=(1+2k)\,\frac{\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ sind. Analog geht de Moivre in den Fällen $n\alpha=(2k\pi+)\,2\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$ vor. Die Darstellung in dieser Veröffentlichung von 1722 ist der in den *MA* ähnlich. De Moivre betont auch in der Vorrede für den Leser der *MA*, daß er die im ersten Buch behandelten Ergebnisse bereits 1722 kannte und am 14. 1. 1723 (a.S.) Newton im wesentlichen in der später publizierten Form vorlegte.

Ausgangspunkt in den *MA* ist die durch die Gleichungen

$$z^{2n}-2l\,z^n+1=0$$
$$z^2-2x\,z+1=0$$

gegebene Beziehung zwischen $\cos n\alpha\,(=l)$ und $\cos\alpha\,(=x)$, wobei $z=\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}$ $(=\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ist.

[267] *De Sectione Anguli, PT* Nr. 374, 1722, S. 228—230.

[268] Sinus Versus, abgekürzt sinv φ gleich $1-\cos\varphi$.

Im Gegensatz zu den Arbeiten von 1707 und 1722, wo DE MOIVRE in bewußt verschleiernder Form Teilergebnisse ohne Beweis gegeben hatte, bringt er in den *MA* im ersten Buch eine vollständige Theorie, der sich im zweiten Buch die zugehörigen Beweise anschließen. Im Rahmen dieser Theorie entwickelt DE MOIVRE trigonometrisch die n-ten Einheitswurzeln, deren Bestimmung durch das Theorem von COTES bereits vorbereitet war[269]. Die n-ten Einheitswurzeln lassen sich aus der in den Korollaren 9 und 10 des ersten Buches[270] enthaltenen Zerlegung von $1-z^n$ in quadratische und lineare Faktoren entnehmen:

> *Si sit n numerus par, et dividatur quantitas $1-z^n$ per $1-zz$, et Quotus ex hac divisione ortus dicatur Q, tunc ex Aequationibus binis $Q=0$, $1-2xz+zz=0$, expulsa quantitate z; emerget Aequatio simplicissima qua determinantur Cosinus Arcuum qui sint ad Circumferentiam semel, bis, ter, quater, quinquies etc. sumptam in ratione 1 ad n; quapropter si a, b, c, d etc. ponantur esse valores istorum Cosinuum, erunt $1-2az+zz$, $1-2bz+zz$, $1-2cz+zz$, $1-2dz+zz$ etc. divisores trinomiales quantitatis $1-z^n$, quorum multitudo designatur per $\frac{n-2}{2}$; his autem adjunguntur Divisores duo binomiales $1-z$, et $1+z$.*

DE MOIVRE zerlegt $1-z^n$ für gerade positive n in die Faktoren $1-z$, $1+z$ und $1-2\cos\frac{2k\pi}{n}z+z^2$, $k=1,\ldots,\frac{n-2}{2}$. Diese Zerlegung ist äquivalent der Bestimmung der n n-ten Einheitswurzeln $\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,\ldots,\frac{n}{2}$ (für $k=0$ und $k=\frac{n}{2}$ verschwindet der Sinus). Die Zerlegung von $1-z^n$ für ungerade n wird analog im Korollar 10 behandelt. Daß DE MOIVRE bei seiner Faktorisierung von $1-z^n$ die quadratischen Faktoren nicht mehr in lineare aufspaltet, entspricht seinem Bestreben in den *MA*, die Verwendung imaginärer Größen zu vermeiden.

Die Faktorisierung von $1-z^n$ erscheint als ein Spezialfall der Zerlegung von $1+2lz^n+z^{2n}$ in quadratische Faktoren, die sich im Fall $l=\cos nx$ (also $|l|\leqq 1$) aus der anfangs gegebenen Darstellung von $\cos x$ als Funktion von $\cos nx$ ableiten läßt. Diese ganze Theorie wird von DE MOIVRE in die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen eingebaut[271].

DE MOIVRE hat später noch einmal über Winkelteilungs- und verwandte Gleichungen publiziert. Im Brief vom 26. 9. 1738 (a. S.) hatte NICHOLAS SAUNDERSON DE MOIVRE, der schon einen Beitrag zu SAUNDERSONS *Elements of Algebra* geliefert hatte, gebeten[66]:

> *Pray, when you write next, be so good as to let me know, whether you have any thing by you relating to the extraction of the cube root of an impossible binomial, such as $-5+\sqrt{-2}$, or $-5-\sqrt{-2}$, or whether in your reading you have met with any way of doing this with the same certainty as in the case of a possible binomial: for my ownpart, I have met with nothing to the purpose about it, not even in Wallis himself, who attempts it.*

Der Antwortbrief DE MOIVRES auf diese Anfrage war offenbar nach dem Tod SAUNDERSONS 1739 verlorengegangen, da DE MOIVRE an den Herausgeber[272] am 29. 4. 1740 (a. S.) schreibt[67]:

---

[269] Zur Entwicklung der n-ten Einheitswurzel siehe TROPFKE a.a.O., [3]II S. 195f.

[270] *MA*, S. 3f.; die zugehörigen Beweise finden sich S. 25f.

[271] Daher heißt der Titel des ersten Buches der *MA*: *De Ordinatis Rationalibus in simpliciores resolvendis.*

[272] Siehe 2.3.2.

I do not exactly remember the terms of my answer; but it was to this purpose, viz. that I had long ago demonstrated, that the rule given by Dr. Wallis was no more than a petitio principii, or at best, a trial which could not succeed in many cases.

Diesen Vorwurf gegenüber Wallis begründet de Moivre, nachdem er die Richtigkeit des von Wallis gegebenen Beispiels zugegeben hatte:

But those who will consult his Algebra [1685] *page* 190 *and* 191, *will plainly see, that the rule he gives is nothing but a trial, both in determining that part of the root which is out of the radical sign, and that part which is within; and that if the original equation had been such, as to have it's root irrational, his trial would never have succeeded. But farther I shall prove, that the extracting the cube root of* $81+\sqrt{-2700}$ *is of the same degree of difficulty as that of extracting the root of the original equation* $r^3-63\,r=162$, *and that both require the trisection of an angle for a perfect solution.*

De Moivre stellt fest: Wallis' Regel bietet nichts zur numerischen Bestimmung der Wurzel im *Casus irreducibilis*; man muß die Wurzel erraten[273]. Im folgenden konstruiert de Moivre die Gleichung mit der Wurzel

$$x=\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$$

... let it be proposed to find the equation which would result from the addition of the two binomials $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ *in order to free them from their radicality: which to find, let us suppose ... supposing* $\sqrt[3]{a\,a+b}=m$ *... therefore ...* $x^3-3mx=2a$; *which to resolve, the trisection of an angle is required ...*

Damit kommt de Moivre zu dem Ergebnis: der *Casus irreducibilis* läßt sich immer auf eine Winkeldreiteilung zurückführen. Die entsprechende Winkelteilungsgleichung hat drei reelle Lösungen[274].

Zum Abschluß des Briefes deutet de Moivre an, daß allgemein die zur Wurzel $x=\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$ gehörige Gleichung eine Winkelteilungsgleichung vom Grade n ist.

William Jones, der den in der Algebra Saundersons publizierten Brief de Moivres vom 29. 4. 1740 (a. S.) gelesen hatte, verlangte von de Moivre eine ausführlichere Darstellung des Problems, $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ auf einen Ausdruck $x+\sqrt{y}$ zurückzuführen[275]. In der in den *PT* für das Jahr 1738 veröffentlichten Antwort[276] hat de Moivre die Gleichungen konstruiert, deren Wurzeln x sich in der Form

$$2x=\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{b}},\qquad b\neq 0$$

darstellen lassen:

---

[273] Ebenso war schon Rafael Bombelli (1526—1572/73) in seiner um 1560 entstandenen *Algebra* bei Beispielen zum *Casus irreducibilis* vorgegangen.

[274] Damit hat de Moivre den Nachweis für die entsprechenden Ergebnisse von Viète — etwa in dessen *Supplementum Geometriae* — und von Girard in der *Invention nouvelle en l'algèbre* geliefert. Vergleiche auch Tropfke a. a. O. ^{3}III, S. 147—152.

[275] De Moivre hatte sich zunächst geweigert, da das Problem längst gelöst sei. Es hatten sich damit im Fall $n=3$ bereits im 16. Jh. verschiedene Italiener und in Deutschland Michael Stifel auseinandergesetzt.

[276] *De Reductione Radicalium ad simpliciores terminos, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio* $a+\sqrt{+b}$, *vel* $a+\sqrt{-b}$, *PT* Nr. 451, 1738.

Daß in dieser Arbeit auf den Brief de Moivres an den Herausgeber der Algebra Saundersons verwiesen wird, ist erklärbar durch die erst 1741 erfolgte Edition der *PT* für 1738.

Si ponatur $2x = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$ *sumaturque praeterea* $\sqrt[n]{aa-b} = m$, *atque interpreteris n successive per* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, *etc. orientur Aequationes hic subjectae.*

1°. $x = a$.
2°. $2xx - m = a$.
3°. $4x^3 - 3mx = a$.
4°. $8x^4 - 8mxx + mm = a$.
5°. $16x^5 - 20mx^3 + 5mmx = a$.
6°. $32x^6 - 48mx^4 + 18mmxx - m^3 = a$.
7°. $64x^7 - 112mx^5 + 56mmx^3 - 7m^3x = a$.
etc.

Hae autem Aequationes ejusdem sunt formae atque Aequationes ad Cosinus, quamquam natura omnino dissideant.

Sit r radius Circuli, l Cosinus arcus cujuslibet dati, x Cosinus alterius arcus, qui sit ad priorem ut 1 *ad n.*

1°. *erit* $x = l$.
2°. $2xx - rr = rl$.
3°. $4x^3 - 3rrx = rrl$.
4°. $8x^4 - 8rrxx + r^4 = r^3 l$.
5°. $16x^5 - 20rrx^3 + 5r^4x = r^4 l$.
6°. $32x^6 - 48rrx^4 + 18r^4xx - r^6 = r^5 l$.
7°. $64x^7 - 112rrx^5 + 56r^4x^3 - 7r^6x = r^6 l$.
etc.

Harum vero generalis forma haec est, ponendo brevitatis causa $r = 1$.

$$2^{n-1} \cdot x^n - 2^{n-3} \cdot \frac{n}{1} x^{n-2} + 2^{n-5} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-3}{2} x^{n-4} - 2^{n-7} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \frac{n-5}{3} x^{n-6}$$
$$+ 2^{n-9} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-5}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot \frac{n-7}{4} x^{n-8} \text{ etc.} = 1.$$ [277]

Differentia harum Aequationum in hoc potissimum ponitur, ut priores ortum ducant ab Aequatione $2x = \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$, *posteriores vero ab Aequatione* $2x = \sqrt[n]{a+\sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$, *quae posterior Aequatio si Radicalitate sua generali liberetur, obtinebuntur Aequationes ad Cosinus.*

Die Unterscheidung der Fälle b und $-b\,(b>0)$ ist notwendig für die numerische Bestimmung der Wurzeln x, da x im Fall $-b$ nur mit Hilfe einer Kosinustafel bestimmt werden kann. DE MOIVRE muß deshalb bei einer derartigen Gleichung feststellen, *an ejus solutio ad speciem Hyperbolicam, an vero ad Circularem referenda sit.* Als Lösung gibt er an:

Sit n altissima dimensio Aequationis, divide Coefficientem secundi termini per $2^{n-3} \cdot n$, *sitque Quotus* $= m$; *jam vide an Quadratum aa majus minusve sit potestate* m^n; *si prior casus acciderit, Aequatio ad Hyperbolam referenda est; sin posterior, ad Circulum.*

Ergänzend dazu bemerkt DE MOIVRE:

Si Aequatio sit Hyperbolici generis, sitque praeterea n numerus impar, erit una tantummodo Radix possibilis, reliquae erunt impossibiles; sin sit n, numerus par, erit unus tantum valor quadrati xx, reliqui sunt impossibiles.

Si Aequatio sit Circularis generis, omnes Radices erunt possibiles.

---

[277] Vergleiche die von JAKOB BERNOULLI in den *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* für 1702, S. 380 veröffentlichte Formel.

Auch diese letzte Bemerkung zeigt, daß DE MOIVRE mit seinen Untersuchungen über Winkelteilungs- und verwandte Gleichungen weit über den vergleichbaren Teil der *Bisectio Laterum* von LEIBNIZ hinausgekommen war. Die Frage, ob DE MOIVRE den Inhalt der *Bisectio* aus einer der beiden Abschriften für OLDENBURG und NEWTON[278] gekannt hat, kann bis jetzt nicht beantwortet werden.

4.4.3. De Moivre über reziproke Gleichungen

Zu der am 2. 11. 1733 der Petersburger Akademie von EULER vorgelegten *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*[279], der *Vermutung über die Formen der Wurzeln von Gleichungen beliebigen Grades*, haben gerade die Arbeiten DE MOIVRES[280] wesentlich beigetragen. Bei den speziellen durch Radikale lösbaren Gleichungen höheren Grades werden in dieser Arbeit auch die folgenden von EULER: *Aequationes hujusmodi, quae posito* $1/y$ *loco* y *formam non mutant voco reciprocas* so bezeichneten reziproken Gleichungen behandelt. Vergleicht man den Abschnitt über reziproke Gleichungen in EULERS *Conjectatio*[281] mit den Ausführungen DE MOIVRES über dieselben Gleichungen in den 1730 publizierten *MA*[282], so ist wegen der Ähnlichkeit im Aufbau und der Identität der Methode und Ergebnisse eine Unabhängigkeit EULERS von DE MOIVRE nur schwer vorstellbar[283].

DE MOIVRE hatte die Reduktion der reziproken Gleichungen bereits im Zusammenhang mit seiner ersten Bearbeitung des Problems der Spieldauer für die *Mensura Sortis*[284], also zwischen 1708 und 1711, gefunden. Geht man von EULERS Definition der reziproken Gleichungen aus, so erhält man sofort die von DE MOIVRE angegebene Eigenschaft:

> *In Tractatu De Mensura Sortis, cum forte incidissem in Aequationes quasdam sic constitutas, ut Coefficientes terminorum hinc inde ab extremis aequaliter distantium, singulae singulis, aequales inter se essent*

und umgekehrt[285].

---

[278] DE MOIVRE hatte zu Lebzeiten NEWTONS des öfteren Einblick in dessen Manuskripte nehmen können; er hat auch wohl durch NEWTON selbst über dessen erste Forschungen gut Bescheid gewußt. Siehe das *Memorandum relating to S^r Isaac Newton given me by M^r Demoivre in Nov^r 1727* von JOHN CONDUITT; Teile des Memorandums sind veröffentlicht in *The Mathematical Papers of Isaac Newton* a.a.O. I, S. 5f.

[279] Siehe LEONHARD EULER, *Opera Omnia* (1) VI, 1921, S. 1—19.

[280] Insbesondere *PT* Nr. 309, 1707.

[281] Abschnitt 11, Ergänzungen in den Abschnitten 12—14.

[282] Ebenda S. 67—71.

[283] Über eine direkte Verbindung DE MOIVRES mit EULER ist nichts bekannt. In dem Briefwechsel zwischen EULER und STIRLING, der mit DE MOIVRE gut befreundet war, wird DE MOIVRE nicht erwähnt. Ob EULER ein Exemplar der *MA* in St. Petersburg zur Verfügung hatte, kann vielleicht noch geklärt werden.

[284] Siehe dazu das *Corollarium* zu Problem 23 der *Mensura Sortis*, *PT* Nr. 329, 1711, S. 260 u. die Behandlung des Problems der Spieldauer in 6.1.

[285] Soll $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^\nu = 0$ bei Substitution von y^{-1} an Stelle von y seine Form nicht ändern, dann muß $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^\nu = y^n \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{n-\nu}$ und damit $a_\nu = a_{n-\nu}$ gelten. Analog gilt die Umkehrung.

Die folgende Aussage:

facile comperi ejusmodi Aequationes ad alias adduci posse quarum dimensiones dimidio saltem pauciores futurae essent quam dimensiones Aequationis propositae. Haec vero observatio, quam haud scio an quisquam ante me unquam fecerit, poterit usui esse in resolvendis Multinomiis quibusdam in Binomia aut Trinomia: quod ut Exemplis ostendamus

enthält das Hauptergebnis, daß sich die reziproken Gleichungen vom Grad $2n$ auf eine Gleichung vom Grad n reduzieren lassen.

DE MOIVRE führt sein Reduktionsverfahren zunächst an den reziproken Gleichungen vom Grad $n=4$, 6 und 8 vor:

Si Multinomium datum sit $z^8+pz^7+qz^6+rz^5+sz^4+rz^3+qzz+pz+1$, *poterunt assumi Trinomia quaterna* $zz+az+1$, $zz+bz+1$, $zz+cz+1$, $zz+dz+1$, *e quorum continuo ductu Multinomium illud generari fingatur, tum ex debita comparatione obtinebitur Aequatio quatuor dimensionum involvens valores omnes quantitatum, a, b, c, d.*

Sed id multo commodius comperietur, fingere Trinomium $zz+xz+1$, *cujus indeterminata x ponatur complecti hos omnes valores; etenim ex Multinomio dato, et Trinomio, ad instar Aequationis nihilo aequalis utroque habito, si quantitas z expungatur, obtinebitur Aequatio*

$$x^4-px^3+(q-4)xx+(r-3p)x+s-2q+2=0$$ [286]

cujus si omnes Radices sint possibiles, eadem opera determinabuntur quantitates omnes a, b, c, d.

DE MOIVRE benutzt also die Transformation $x=-\frac{z^2+1}{z}$ bzw. ihre Umkehrung, um eine reziproke Gleichung vom Grad $2n$ auf eine Gleichung vom Grad n zu reduzieren. Nach einer Tabelle für die reziproken Gleichungen und ihre reduzierten für die Grade $2n$, $n=2$ bis 6, gibt DE MOIVRE die Reduktionsgleichung vom Grade n der allgemeinen reziproken Gleichung vom Grad $2n$, d.h. er gibt die Koeffizienten der ersten acht Glieder und damit eine für seine Zeit ausreichende Grundlage für das daraus zu ersehende Bildungsgesetz aller weiteren Koeffizienten[287]. DE MOIVRE ergänzt noch, daß eine reziproke Gleichung vom Grad $2n+1$ stets durch $z+1$ teilbar und der Quotient wieder eine reziproke Gleichung ist:

Si detur Multinomium ex partibus numero paribus conflatum[288] *atque ita affectum ut Coefficientes terminorum ab extremis aequaliter distantium sint inter se aequales, Multinomium illud ad Multinomium proxime inferius adducetur; etenim si Multinomium datum sit* $z^7+pz^6+qz^5+rz^4+rz^3+qzz+pz+1$, *quod finxeris nihilo aequale, tunc posita* $z=-1$, *reperies* $-1+p-q+r-r+q-p+1$, *quae quantitates cum sese mutuo destruant, indicio est Multinomium datum dividi posse per* $z+1$.

Damit lassen sich nun alle reziproken Gleichungen mit einem Grad n kleiner 10 durch Radikale lösen[289].

---

[286] Die Formel ist abweichend von DE MOIVRES Überstreichung in der heutigen Klammerschreibweise und mit dem Multiplikationspunkt geschrieben.

[287] EULER gab die allgemeine Reduktionsgleichung in derselben Form wieder; nur gab er einen weiteren Koeffizienten an.

[288] Ein Polynom $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit einer geraden Anzahl von Gliedern ist von ungeradem Grad.

[289] EULER bemerkt noch im Abschnitt 14 der *Conjectatio*, daß die spezielle reziproke Gleichung $y^{2n}+py^n+1=0$ durch die MOIVRESche Transformation in eine Winkelteilungs- oder verwandte Gleichung vom Grad n übergeht, und kommt so zu dem in 4.1. behandelten FERMATschen Ergebnis.

4.5. Übersicht zu der in 4.1. bis 4.4. gegebenen Entwicklung

In den vorangehenden Abschnitten wurden die Arbeiten DE MOIVRES über und im Zusammenhang mit durch Radikale lösbare(n) Gleichungen in den Rahmen einer Entwicklung gestellt, die man bei VIÈTE beginnen lassen kann, und die sich bis EULER erstreckt und von EULER über LAGRANGE weiter zu ABEL führt.

Eine solche Einordnung der DE MOIVRESchen Arbeiten ist vor allem im Sinne einer Wirkungsgeschichte zu verstehen: EULER hat DE MOIVRES Ergebnisse für seine Gleichungslehre einheitlich zusammengefaßt und zumindest als Bestätigung seiner *Conjectatio* über die Auflösung der Gleichungen fünften und höheren Grades verwendet.

Zwei Gründe sprechen für die Berücksichtigung der Entwicklung vor DE MOIVRE. Einesteils hat man den unmittelbaren und mittelbaren Einfluß der vorangehenden Entwicklung auf DE MOIVRE, weil die Mathematiker nach DE MOIVRE sich vor allem auf seine Ergebnisse stützten, nicht oder nur unzureichend beachtet, zum anderen war DE MOIVRE kein kühner Neuerer, sondern ein Mathematiker, der nur mit der Legitimation einer Autorität arbeitete, der für alle seine Forschungen vielleicht in einem höheren Maß als andere einen Impuls, eine Anregung von außen brauchte. VIÈTE bietet sich deshalb als Anfang der Entwicklung an, weil er zuerst nicht nur die Mittel zu einer Darstellung von allgemeinen Gleichungen durch Einführung seiner Buchstabenrechnung geliefert, sondern bereits ein für seine Zeit vollständiges Gebäude der Gleichungslehre errichtet hatte. Neben den Lösungen der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen behandelte VIÈTE in den *Angulares Sectiones* spezielle Gleichungen höheren Grades, nämlich die Winkelteilungsgleichungen, deren sämtliche für ihn sinnvolle, also positiven Lösungen, er anzugeben vermochte. Insbesondere FERMAT, GREGORY, NEWTON und LEIBNIZ kannten die *Angulares Sectiones* VIÈTES.

Man hat den Eindruck, daß die Mathematiker nach VIÈTE im Rahmen einer heute geringfügig erscheinenden Abstraktion lange nicht über dessen Ergebnisse hinausgekommen sind[290]. Ein Grund ist, daß man unter dem Einfluß von DESCARTES die VIÈTEschen Ergebnisse teilweise vergessen hatte und sie deshalb wiederentdecken mußte. Zudem hatte VIÈTE seine Theoremata über Winkelteilungen in Form von Beziehungen zwischen Seiten oder Seitenverhältnissen von rechtwinkligen Dreiecken teilweise recht undurchsichtig dargestellt. Es darf auch nicht übersehen werden, daß VIÈTE die Winkelteilungsgleichung n-ten Grades nicht allgemein angeben, sondern lediglich durch die einer Rekursionsformel entsprechenden Koeffizientencanones sukzessive bis zu einem beliebig großen n konstruieren konnte.

FERMAT, der sich mit der VIÈTEschen Lösung der VAN ROOMENschen Gleichung beschäftigt hatte, erkannte, daß durch die Form der Winkelteilungsgleichungen mehr als nur die Winkelteilungsgleichungen umfaßt werden, weil eine solche Gleichung, falls das konstante Glied, das ja zunächst der zum Winkel $n\alpha$ gehörigen Sehne gleich ist, größer als der Durchmesser des betrachteten Kreises wird, nicht mehr als Winkelteilungsgleichung angesehen werden kann. Für diesen von

---

[290] Vergleiche etwa die Arbeiten des BERNOULLI-Kreises 1701 bis 1703 und 4.3.

VIÈTE unberücksichtigten Fall, daß die Konstante größer als der Durchmesser wird, konnte FERMAT eine Radikallösung angeben.

Ob LEIBNIZ von dieser FERMATschen Arbeit wußte, sei es aus den nachgelassenen FERMAT-Papieren oder über HUYGENS, ist nicht bekannt. LEIBNIZ stellte in seiner 1675 konzipierten Schrift *De Bisectione Laterum* die durch den Ansatz $z = m - n$ (daher Zweiteilung) und

$$z^s = (m-n)^s = a_0 + a_1 z^{s-2} + a_2 z^{s-4} + \cdots + \begin{cases} a_{t-1} z^2 & \text{für } s = 2t \\ a_{t-1} z & \text{für } s = 2t-1, \end{cases} \qquad t \text{ natürlich,}$$

entstehenden Gleichungen zusammen. Er bemerkte, daß die a_ν, $\nu = 1, \ldots, t-1$ die Form $p_\nu (mn)^\nu$ haben, wobei die p_ν figurierte Zahlen sind, und a_0 für ungerade s gleich $m^s - n^s$, für gerade s gleich $(m^{s/2} - n^{s/2})^2$ ist. LEIBNIZ erkannte, daß er damit die speziellen dem Radikalansatz einer verallgemeinerten Cardanischen Lösungsformel genügenden Gleichungen gefunden hatte. LEIBNIZ wußte auch um den Zusammenhang dieser Gleichungen mit den Winkelteilungsgleichungen und nahm ein Ergebnis DE MOIVRES, allerdings unzulässig verallgemeinert, vorweg. Sein in dieser Arbeit enthaltener Radikalansatz für die allgemeine Gleichung fünften Grades deckt sich nahezu mit dem durch EULERS *Conjectatio* Bedingten, den dann ABEL als für die durch Radikale lösbaren Gleichungen fünften Grades allgemein gültig nachwies. Die *Bisectio* wurde 1676 in zwei Abschriften den Engländern zugänglich gemacht. Es ist nicht ausgeschlossen, daß DE MOIVRE eine solche Abschrift gesehen hat.

Bei den Vorgängern DE MOIVRES in England ist zunächst WALLIS zu nennen, dessen Abhängigkeit von VIÈTE für seine Winkelschnitte nur mittelbar über OUGHTRED nachzuweisen ist[291].

WALLIS konnte zu den gegebenen Sehnen der Winkel α und α/n für $n = 3, 5$ und 7 die $n-1$ weiteren Sehnen konstruieren, deren Winkel mit n multipliziert einen Winkel ergeben, dessen zugehörige Sehne gleich der Sehne des Winkels α ist.

WALLIS ließ ebenso wie LEIBNIZ negative und komplexe Zahlen zu und bemühte sich um die Einbürgerung der negativen und komplexen Zahlen in die Mathematik.

GREGORY und NEWTON entwickelten Winkelteilungsreihen. DE MOIVRE war stets bestrebt, seine Ergebnisse mit der von NEWTON 1676 via OLDENBURG an LEIBNIZ übermittelten Winkelteilungsreihe zu verknüpfen[229].

Direkte Anregung erhielt DE MOIVRE durch die Arbeit JOHN MACHINS über sehr schnell konvergierende Reihen für π und schon vorher durch die Arbeiten des BERNOULLI-Kreises über Winkelteilungen. Den Zugang zu einer neuen Methode fand DE MOIVRE durch eine Veröffentlichung JOHANN I BERNOULLIS in den *AE* von 1703; dort hatte JOHANN reelle Größen durch imaginäre substituiert.

Bereits 1707 hatte DE MOIVRE das Äquivalent von

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

gefunden; die Beziehung selbst hat er allerdings nie explizit publiziert.

---

[291] Siehe CH. J. SCRIBA a.a.O., S. 50–54.

Ob Cotes wiederum von de Moivre abhängig ist mit der von ihm festgestellten Identität $i\varphi = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ist nicht überprüfbar. Sicher ist, daß de Moivre, der 1707 für spezielle Gleichungen ungeraden beliebig hohen Grades je eine Radikallösung gefunden hatte, von dem 1722 veröffentlichten Cotesschen Theorem ausgehend sämtliche Wurzeln der Winkelteilungsgleichungen trigonometrisch angeben und in diesem Zusammenhang auch die n-ten Einheitswurzeln bestimmen konnte.

Noch vor 1711 war de Moivre auf die von Euler so genannten reziproken Gleichungen gestoßen. De Moivre erkannte, daß jede reziproke Gleichung ungeraden Grades in z die Wurzel -1 hat und nach Division durch $z+1$ wieder eine reziproke Gleichung ergibt. Weiterhin läßt sich die Lösung jeder reziproken Gleichung geraden Grades auf eine Gleichung, deren Grad halb so groß ist, zurückführen. Damit sind alle reziproken Gleichungen bis zum Grad neun einschließlich durch Radikale lösbar.

In Veröffentlichungen von 1740 hatte de Moivre, ausgehend von dem Problem, $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ in der Form $x+\sqrt{y}$ darzustellen, womit $\sqrt[n]{a-\sqrt{b}} = x-\sqrt{y}$ und damit $2x - \sqrt[n]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}$ eingeschlossen ist, die Gleichung n-ten Grades gesucht, der gerade dieses x als Lösung genügt. De Moivre unterschied bei der Bestimmung der Gleichungen, deren Wurzeln sich in dieser Form darstellen lassen, die Fälle b größer und b kleiner Null. Im zweiten Fall erhielt er gerade die Winkelteilungsgleichungen für den Kosinus; diese Art nannte er *Aequationes Circularis generis*. Für b größer Null nannte er die Gleichungen *Hyperbolici generis*. Die *Aequationes Hyperbolici generis* umfassen auch die 1707 gefundenen, aus dem gegebenen ganzzahligen Verhältnis zweier Hyperbelsektoren resultierenden Gleichungen. Diese von de Moivre bestimmten Gleichungen sind in die von Leibniz in der *Bisectio Laterum* aufgestellten durch Radikale lösbaren Gleichungen überführbar.

Wieviel de Moivre von den einschlägigen Arbeiten seiner Vorgänger wußte, ist nicht bekannt; jedenfalls hat er in seinen Veröffentlichungen alle früheren Ergebnisse mit umfaßt und erweitert.

Die Entdeckung und Reduktion der reziproken Gleichungen ist eine eigenständige Leistung de Moivres.

Mit der bei ihm in Form der beiden Gleichungen

$$z^{2n} - 2lz^n + 1 = 0$$

$$z^2 - 2xz + 1 = 0 \quad (\text{wobei} \quad l = \cos n\alpha,\ x = \cos\alpha)$$

gegebenen Beziehung

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \sqrt[n]{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}$$

hat er die Entwicklung des Rechnens mit komplexen Größen entscheidend gefördert.

5. De Moivre über Reihen

Die Entdeckung von Methoden zur Entwicklung von einigen speziellen Funktionen in formale Potenzreihen in der zweiten Hälfte des 17. Jhs. führte bei der Nachfolgergeneration nicht so sehr zu einer Vertiefung der Kenntnisse über

Folgen und Reihen, sondern vor allem zu einer Ausweitung des Bereichs der mit bekannten oder neuen Methoden zugänglichen Reihen. So suchte und fand DE MOIVRE um 1695 das Polynomialtheorem im Anschluß an das und als Verallgemeinerung des NEWTONschen Binomialtheorems. Zwischen 1711 und 1714 war DE MOIVRE im Zusammenhang mit dem Problem der Spieldauer auf spezielle Folgen bzw. Reihen gestoßen, die er später rekurrent nannte. Den Hauptsatz seiner Theorie der rekurrenten Reihen hatte er spätestens 1718 gefunden. Ebenfalls im Rahmen der Erfordernisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelte DE MOIVRE eine Modifikation der von JAKOB BERNOULLI entdeckten Methode zur Summierung spezieller, etwa aus der harmonischen Reihe entstandener Zahlenreihen. Voraussetzung für den von DE MOIVRE entdeckten Grenzwertsatz für binomiale Verteilungen war eine Abschätzung der mittleren Binomialkoeffizienten für große n; damit ist verbunden eine Abschätzung für $\ln(n!)$; diese konnte DE MOIVRE geben, nachdem er 1730 im Wettbewerb mit JAMES STIRLING, allerdings nach und in Abhängigkeit von STIRLING eine asymptotische Reihe für $\ln(n!)$ gefunden hatte.

5.1. Das Polynomialtheorem

DE MOIVRE leitet seine Veröffentlichung des Polynomialtheorems in den *PT* für 1697 mit den Worten ein[292]:

> *'T is about two Years since, that considering Mr. Newton's Theorem for Raising a Binomial to any given Power, or Extracting any Root of the same; I enquired, whether what he had done for a Binomial, could not be done for an infinite Multinomial. I soon found the thing was possible, and effected it, as you may see in the following Paper.*

1695 hatte DE MOIVRE ausgehend vom Binomialtheorem NEWTONS[293] das umfassendere Polynomialtheorem gefunden. Im selben Jahr schrieb LEIBNIZ an JOHANN I BERNOULLI[294]:

> *Excogitavi autem olim mirabilem regulam, pro numeris coefficientibus potestatum, non tantum a binomio $x+y$, sed et a trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuscunque, verbi gratia, decimi, et potentia in ejus valore comprehensa, ut $x^5y^3z^2$, possim statim assignare numerum coefficientem, quem habere debet, sine ulla Tabula jam calculata; quam considerationem puto huic quoque meditationi profuturam; est enim genesis potestatum generalis.*

LEIBNIZ hat dem *olim* nach zu schließen das Polynomialtheorem früher als DE MOIVRE entdeckt, eine Anwendung davon allerdings erst 1700 in den *AE* veröffentlicht.

DE MOIVRE ging von der Reihe $az+bz^2+cz^3+\cdots$ aus und potenzierte sie mit der (natürlichen) Zahl m. Die ersten sieben Glieder der entstehenden Reihe gab

[292] *PT* Nr. 230 für Juli 1697, S. 619—625 hier S. 619.

[293] NEWTON hatte zunächst die Möglichkeit erkannt, die für natürliche Exponenten bekannte Binomialformel formal auf die Exponenten -1 und $\frac{1}{2}$ zu übertragen. Er konnte diese formale Übertragung durch formale Division bzw. Quadrieren bestätigen. Aus dieser Gültigkeit für alle natürlichen Exponenten und die Exponenten -1 und $\frac{1}{2}$ extra- und interpolierte er die Gültigkeit für beliebig reelle Exponenten. Für NEWTONS Aufzeichnungen zur Entwicklung des Binomialtheorems im Winter 1664/65 und Herbst 1665 siehe: *The Mathematical Papers of Isaac Newton* a.a.O. I, S. 104—111 und S. 122—134.

[294] Brief vom 16. 5. 1695 (n. S.), in LEIBNIZ (5) a.a.O. I, S. 46—51 hier S. 47.

DE MOIVRE explizit in einer Tabelle an. Im Text erläutert DE MOIVRE allgemein eine Regel, wonach er die Koeffizienten von z^{m+r} aus den bereits bekannten Koeffizienten von $z^{m+r-\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ berechnen kann. Die verbale Beschreibung dieser Regel erforderte geradezu die Einführung von Indizes. Diesem Erfordernis ist DE MOIVRE tatsächlich nachgekommen. Für unseren heutigen Index, — das Wort *Index* gebraucht DE MOIVRE im Sinne unseres Exponenten — wählte DE MOIVRE den Ausdruck *Exponent*[295]:

Here I must take notice that by the Exponent of a Letter, I mean the number which expresses what Place the Letter has in the Alphabet, so 3 *is the Exponent of the Letter c because the Letter c is the* 3^d *in the Alphabet.*

Den weiteren Schritt, diesen Index nicht durch einen bestimmten Buchstaben des Alphabets, sondern durch die entsprechende natürliche Zahl zu symbolisieren, hatte LEIBNIZ gemacht. LEIBNIZ hat seine Art der Indizierung von Polynom- und Reihenkoeffizienten wahrscheinlich schon während des Aufenthaltes in Paris gefunden. Er verwandte als Koeffizienten später keine indizierten Buchstaben sondern repräsentierte diese, statt durch Buchstaben wie DE MOIVRE, durch Zahlenpaare. Ein Beispiel gab LEIBNIZ in einem Brief an den Marquis DE L'HOSPITAL vom 28. 4. 1693[296], in dem er ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem in der Form:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

darstellte, wo also ik unserem a_{ik} entspricht.

MOIVRE hat wie LEIBNIZ die Notwendigkeit einer Indizierung erkannt, hatte aber die Indizierung in die Buchstaben gesteckt und blieb damit bei der alten, unzulänglichen Kennzeichnung der Koeffizienten durch verschiedene Buchstaben.

Daß DE MOIVRE für sein Theorem gerade eine Reihe der Form $az + bz^2 + cz^3 + \cdots$ verwendete, erklärt sich wohl aus der Übereinstimmung zwischen Index und Exponenten von z, die eine einfachere Formulierung für das Bildungsgesetz der neuen Reihe erlaubt[297].

DE MOIVRES komplizierte Rekursionsregel in den *PT* von 1697 entspricht dem einfacheren Bildungsgesetz für den Koeffizienten von z^l in den *MA*[298]:

Jam cum potestas quaelibet indeterminatae z, ad intervallum quodlibet datum l a primo Seriei termino posita sit z^l, *inde sequitur producta omnia literalia potestati* z^l *annectenda, adeoque ad intervallum l ponenda, obtineri posse, si ita combinentur literae ingredientes Multinomium datum, ut summa Exponentium in productis singulis semper evadat* $n + l$, *numerus vero Literarum sit n.*

Quod coefficientes attinet, a nobis demonstratum fuit in Actis Philosophicis supra memoratis[292], *nihil aliud iis designari quam numerus permutationum quas literae productum constituentes subire possunt.*

Der Koeffizient von z^{m+r} in der aus $(az + bz^2 + cz^3 + \cdots)^m$ resultierenden Reihe ist die Summe all der Produkte $a^p b^q c^s \ldots$, bei denen die Anzahl der Faktoren, also

---

[295] *PT* Nr. 230, 1697, S. 620.

[296] Siehe LEIBNIZ (6) a.a.O. II, S. 239.

[297] In den *MA* geht DE MOIVRE bei der Darstellung des Polynomialtheorems von der Reihe $a + bz + cz^2 + \cdots$ aus.

[298] *MA*, S. 87f. Vergleiche LEIBNIZ (6) a.a.O. III, S. 175, 181, 192 (1695).

die Summe der Exponenten $p+q+s+\cdots$, gleich m und die Summe der Indizes, hier $p+2q+3s+\cdots$, gleich $m+r$ ist, und jedes dieser Produkte $a^p b^q c^s \ldots$ mit der Anzahl seiner Anordnungsmöglichkeiten $\frac{n!}{p!\,q!\,s!\ldots}$ multipliziert wird.

In einem mit *Demonstration* überschriebenen Abschnitt der Arbeit von 1697 findet man eine Plausibilitätsbetrachtung für diese Regel, die eigentlich als nur für die Potenzierung mit natürlichen Exponenten gültig angesehen werden kann. Da er im Titel der Arbeit angekündigt hatte, daß seine Methode auch *Extracting any given Root* einer Reihe leiste, fühlte sich DE MOIVRE verpflichtet, die stillschweigend vorgenommene formale Übertragung seiner Regel auf rationale Exponenten zu rechtfertigen[299]:

> *There remains but one thing to demonstrate which is, that, what I have said of Powers whose Index is an Integer, may be adapted to Roots, or Powers whose Index is a Fraction; but it appears at first sight why it should be so: for, the same Reason which makes me consider Roots under the Notion of Powers, will make me conclude, that whatever is said of one may be said of t'other. However I think to give sometime a more formal Demonstration of it.*

Der letzte Satz zeigt immerhin, daß DE MOIVRE das Unbefriedigende einer solchen Erklärung erkannt hatte. In den *MA* gab DE MOIVRE ergänzend die Entwicklung für den Exponenten -1 an[300].

In den *PT* für 1698 veröffentlichte DE MOIVRE eine Anwendung seines Polynomialtheorems in Verbindung mit dem Reihenansatz in unbestimmten Koeffizienten. Die Arbeit[301] enthielt die Lösung des Problems, die Wurzel z einer *unendlichen Gleichung*

$$az+bz^2+cz^3+\cdots = gy+hy^2+iy^3+\cdots$$

aufzufinden[14]. Als Ergebnis gab DE MOIVRE zunächst die ersten sechs Glieder der Entwicklung von z, von denen die ersten drei hier wiedergegeben seien:

$$z=\frac{g}{a}y+\frac{h-bAA}{a}y^2+\frac{i-2bAB-cA^3}{a}y^3+\cdots$$

Dann erklärte er das allgemeine Bildungsgesetz für den Koeffizienten von y^{n+1} aus den als bekannt vorausgesetzten Koeffizienten von y^ν, $\nu=1,\ldots,n$.

> *For the understanding of this Series [für z], and in order to continue it as far as we please; it is to be observed,*
>
> *1. That every Capital Letter is equal to the Coefficient of each preceding Term; thus the Letter B is equal to the Coefficient* $\frac{h-bAA}{a}$.
>
> *2. That the Denominator of each Coefficient is always a.*
>
> *3. That the first Member of each Numerator, is always a Coefficient of the Series* $gy+hyy+iy^3$, *etc. viz. the First Numerator begins with the first Coefficient g, the Second Numerator with the Second Co-efficient h, and so on*[302].

---

[299] *PT* Nr. 230, 1697, S. 624f.

[300] *MA*, S. 89f.

[301] *A Method of extracting the Root of an Infinite Equation*, *PT* Nr. 240, 1698, S. 190—193.

[302] Hier zeigt sich die Unzulänglichkeit der DE MOIVRESchen Kennzeichnung von Indizes durch den Platz des zugehörigen Buchstaben im Alphabet ganz besonders, da er für die Reihe $gy+hy^2+iy^3+\cdots$ entweder auf eine Indizierung verzichten oder eine „Translation" in der Form: Index von g gleich 1, Index von h gleich 2, usw. vornehmen müßte. In diesem Fall aber wären die Koeffizienten g, h, i, ..., falls sie auch in der z-Reihe vorkommen, doppelt indiziert.

4. That in every Member after the First, the Sum of the Exponents of the Capital Letters, is always equal to the Index of the Power to which this Member belongs: Thus considering the Coefficient

$$\frac{k-bBB-2bAC-3cAAB-dA^4}{a},$$

which belongs to the Power y^4, we shall see in every Member bBB, $2bAC$, $3cAAB$, dA^4, the Sum of the Exponents of the Capital Letters is 4, (where I must take notice, that by the Exponent of a Letter; I mean the Number which expresses what Place it has in the Alphabet; thus 4 is the Exponent of the Letter D) hence I derive this Rule for finding the Capital Letters of all the Members that belong to any Power; Combine the Capital Letters as often as you can make the Sum of their Exponents Equal to the Index of the Power to which they belong.

5. That the Exponents of the small Letters, which are written before the Capitals, express how many Capitals there is in each Member.

6. That the Numerical Figures or Unciae that occur in these Members, express the Number of Permutations which the Capital Letters of every Member are capable of.

De Moivre gab keinen Beweis, sondern lediglich als Beweismethode den Ansatz in unbestimmten Koeffizienten und Koeffizientenvergleich:

For the Demonstration of this; suppose $z = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$, etc. Substitute this Series in the room of z, and the Powers of this Series, in the room of the Powers of z; there will arise a new Series; then take the Coefficients which belong to the several Powers of y, in this new Series, and make them equal to the corresponding Co-efficients of the Series $gy + hyy + iy^3$, etc. and the Co-efficients A, B, C, D, etc. will be found such as I have determined them.

Im Anschluß verweist de Moivre insbesondere auf die Reihenumkehrung als Anwendungsmöglichkeit seiner Regel:

This Theorem may be applied to what is called the Reversion of Series, such as finding the Number from its Logarithm given; the Sine from the Arc; the Ordinate of an Ellipse from an Area given to be cut from any Point in the Axis.

Nun folgen zwei interessante Beispiele:

The Chord of an Arc being given, to find the Chord of another Arc, that shall be to the first as n to 1. Let y be the Chord given, z the Chord required.

Das ist genau das Problem, dessen Lösung Newton 1676 in Form seiner Winkelteilungsreihe Leibniz mitteilen ließ[303]. Für den Beweis der Newtonschen Winkelteilungsreihe konnte de Moivre die Arcussinusreihe als bekannt voraussetzen[304]:

Now the Arc belonging to the Chord y is,

$$y + \frac{y^3}{6dd} + \frac{3y^5}{40d^4} + \frac{5y^7}{112d^6} \text{ etc.}$$

---

[303] Siehe dazu 4.3. und Fußnote 230.

[304] Im Brief vom 7. 1. 1668/69 (a. S.) teilte Collins James Gregory mit, [Nikolaus] Mercator habe wiederholt behauptet, daß er eine Reihe für den Kreis habe, die u.a. auch die Berechnung des Bogens aus der Sehne miteinschließe. Siehe dazu H.W. Turnbull a.a.O., S. 56, 60, 66, 71. Newton hat in dem Traktat *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, der 1669 über Barrow an Collins ging, die Arcussinusreihe explizit angegeben. Siehe dazu Newton (4) a.a.O. I, S. 276. Die von Oktober 1666 stammende Arbeit über Fluxionen zeigt, daß Newton zu dieser Zeit zumindest bereits die Mittel hatte, die Arcussinusreihe zu berechnen. Siehe Newton (5) a.a.O. I, S. 413.

and the Arc belonging to the Chord z is

$$z + \frac{z^3}{6dd} + \frac{3z^5}{40d^4} + \frac{5z^7}{112d^6} \text{ etc.}$$

Setzt man den zum Bogen mit der Sehne y gehörigen Winkel gleich α und nennt den zugehörigen Kreisradius bzw. Kreisdurchmesser r bzw. d, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{d},$$

also

$$\alpha = 2 \arcsin\frac{y}{d}$$

und

$$\operatorname{arc}\alpha = \alpha r = d \arcsin\frac{y}{d};$$

entsprechend

$$\operatorname{arc} n\alpha = n\alpha r = d \arcsin\frac{z}{d}.$$

Daraus erhält man unmittelbar die von DE MOIVRE angegebene Entwicklung. Nach Voraussetzung verhalten sich die beiden Bögen wie 1 zu n; man erhält deshalb die Gleichung:

$$z + \frac{z^3}{6d^2} + \frac{3z^5}{40d^4} + \cdots = ny + \frac{ny^3}{6d^2} + \frac{3ny^5}{40d^4} + \cdots$$

und kann jetzt die Regel anwenden:

Compare these Two Series with the Two Series of the Theorem, and you will find

$$a=1, \quad b=0, \quad c=\frac{1}{6dd}, \quad d=0, \quad e=\frac{3}{40d^4}, \quad f=0, \text{ etc.}$$

$$g=n, \quad h=0, \quad i=\frac{n}{6dd}, \quad k=0, \quad l=\frac{3n}{40d^4}, \quad m=0, \text{ etc.}$$

$$\text{hence } z \text{ will be} = ny + \frac{n-n^3}{6dd}\cdot y^3, \text{ etc.}$$

$$\text{or } ny + \frac{1-nn}{2\cdot 3dd}\, yyA, \text{ etc.}$$

Supposing A to denote the whole preceding Term, which will be the same Series as Mr. Newton has first found.

Mit seiner *Methode* konnte DE MOIVRE auch folgendes Problem lösen, das ich in heutiger Schreibweise wiedergeben will:

Wenn $n\cdot\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt$ und $f(t)$ in Form einer Potenzreihe gegeben ist, soll y als Funktion von x bestimmt werden.

Als zweites Beispiel brachte DE MOIVRE die Potenzreihenentwicklung von $\log(1+z)$ in z. DE MOIVRE brauchte dazu keine andere Eigenschaft, *than that Logarithms are the Indices of Powers, als daß die Logarithmen die Exponenten von Potenzen sind.* Aus dieser Eigenschaft folgt die von DE MOIVRE verwendete Funktionalgleichung für den Logarithmus[305]: $\log z^n = n \log z$.

Let the Number, whose Logarithm we inquire, be $1+z$, *suppose its Log. to be* $az+bzz+cz^3$, *etc. Let there be another Number* $1+y$; *thereof its Logarithm will be* $ay+byy+cy^3$, *etc. Now if* $1+z=(1+y)^n$, *it follows, that* $az+bzz+cz^3$ *etc.,* $ay+byy+cy^3$, *etc*::n, 1.[261] *that is,* $az+bzz+cz^3$, *etc.* $= nay+nbyy+ncy^3$, *etc.*

[305] $a^{a\log x} = x$, $a^{a\log x^n} = x^n = (a^{a\log x})^n = a^{n\cdot a\log x}$.

Therefore we may find a Value of z exprest by the Powers of y; again, since $1+z=(1+y)^n$, *therefore* $z=(1+y)^n-1$ *that is*

$$z=ny+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}yy+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}y^3\ etc.$$ [286]

Therefore z is doubly exprest by the Powers of y. Compare these Two Values together, and the Coefficients a, b, c, etc. will be determin'd, except the first a which may be taken at Pleasure, and gives accordingly, all the different Species of Logarithms.

Das (bereits bekannte) Ergebnis gab DE MOIVRE gar nicht mehr an. Interessant ist immerhin, daß DE MOIVRE lediglich von der Funktionalgleichung des Logarithmus ausgehend die Potenzreihenentwicklung in z von $\log(1+z)$ mit Hilfe seines Theorems bestimmen konnte[306].

NICOLAS FATIO DE DUILLIER hatte in seiner 1699 veröffentlichten Lösung des Brachystochronenproblems LEIBNIZ, der nur den Brüdern JAKOB und JOHANN I BERNOULLI, L'HOSPITAL, HUYGENS, HUDDE und NEWTON eine Lösung zugetraut hatte, verschiedentlich heftig angegriffen. NICOLAS FATIO erwähnte unter den vielen, die seiner Ansicht nach das Problem ebenfalls hätten lösen können als einzigen namentlich DE MOIVRE, dessen in den *PT* publiziertes Polynomialtheorem doch höher zu bewerten sei als die Lösung des Brachystochronenproblems[307a]. LEIBNIZ antwortete darauf in einem Artikel der *AE* von 1700, der sich vor allem gegen die die Erfindung des Differentialkalküls betreffenden Unterstellungen von NICOLAS FATIO richtete[307b] mit einer in Briefen an JOHANN I BERNOULLI vom 28. 7. 1699 und vom 25. 4. 1700 angekündigten Verallgemeinerung des von DE MOIVRE 1698 veröffentlichten Problems.

LEIBNIZ hatte das Problem zur Bestimmung von z mit der bereits besprochenen Indizierung so formuliert:

Nempe aequatio data generalissima relationis z ad y sic exprimetur

$$0=(01y+02y^2+03y^3\ etc.)+(-10+11y+12y^2+13y^3\ etc.)z^1$$
$$+(20+21y+22y^2+23y^3\ etc.)z^2+etc.,$$

ubi hoc Calculi commoditatem, ut valores quaesitorum fiant affirmativi ideo ipsi 10 *praefiximus signum —. Quaeritur jam valor ipsius z, seu quaeritur in aequatione* $z=101y+102y^2+103y^3+104y^4+105y^5+etc.$, *qui sint valores numerorum quaesitorum assumtitiorum* 101, 102, 103 *etc. (quos majusculos hic vocabimus) per numeros assumtitios aequationis datae (quos vocabimus minusculos) nempe per ipsos* 01, 02, 03 *etc.* 10, 11, 12 *etc.* 20, 21, 22 *etc. etc.*

LEIBNIZ löste seine Gleichung also ebenfalls durch den Ansatz in unbestimmten Koeffizienten, äußerte später auch, daß DE MOIVRE seine allgemeinere Gleichung sicher auch gelöst hätte, provozierte aber vorher DE MOIVRE durch die Feststellung, daß DE MOIVRES Theorem nur ein Spezialfall seines Theorems sei. DE MOIVRE

[306] Vergleiche dazu J.E. HOFMANN (3) a.a.O. J.E. HOFMANN sieht DE MOIVRES Funktionalgleichung für den Logarithmus und HALLEYS Auffassung des Logarithmus als *mensura rationis* in der *Logometria* von COTES vereinigt. Für COTES' Entwicklung des Logarithmus siehe Fußnote 252.

[307a] Siehe: NICOLAS FATIO DE DUILLIER, *Lineae Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex*, London 1690, S. 19.

[307b] *G.G. Leibnitii Responsio Ad Dn. Nic. Fatii Duillerii Imputationes. Accessit nova Artis Analyticae promotio specimine indicata; dum Designatione per Numeros assumtitios loco literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit. AE* Mai 1700, S. 198—208.

entgegnete in den *PT* für 1702[308], daß die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ der Gleichung von 1698, die LEIBNIZ als konstant aufgefaßt hatte, auch Polynome oder Reihen sein könnten, und deshalb das von ihm gelöste Problem ebenso allgemein sei wie das von LEIBNIZ. Den Fortschritt und damit den wahren Wert seiner Arbeit hat LEIBNIZ klar erkannt und bezeichnete ihn als *novam Analyticae promotionem in hac nostra designatione per Numeros loco literarum*. Er begründete dies mit dem folgenden Satz, der die Bedeutung einer angemessenen Symbolik beinhaltet:

Nam cum mens nostra saepissime pro rebus cogitandis notas adhibere debeat, et Characteristica sit maximum meditandi subsidium, consequens est, tanto utiliores esse notas, quando magis exprimunt rerum relationes.

5.2. Rekurrente Reihen

Beim Problem der Spieldauer hatte DE MOIVRE Reihen bzw. Folgen $((a_n))$ entdeckt mit der Eigenschaft, daß sich jedes a_n als lineare Funktion $a_n = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu a_{n-\nu}$ der r vorangehenden Glieder mit von n unabhängigen Koeffizienten α_ν darstellen läßt. DE MOIVRE entwickelte sehr schnell eine Theorie dieser Reihen bzw. Folgen, die er später — in einer Publikation zum ersten Mal 1722 — *rekurrent* nannte.

Die rasche Übernahme der rekurrenten Reihen (abgekürzt r.R.) als Methode und Forschungsobjekt brachte DE MOIVRE wohl dazu, seine bereits 1718 hinterlegten Ergebnisse nun vollständig zu publizieren. Seine Priorität unterstrich DE MOIVRE in einem Abschnitt über die Entstehung seiner Theorie[309]:

Post editum Tractatulum de Mensura sortis Actis Philosophicis, pro Mensibus Jan. Feb. Mart. Anno 1711. insertum, multa mihi occurere observatu digna circa Series quasdam quarum termini ita sunt constituti, ut eorum quilibet ad totidem antecedentes semper habeat rationes datas; etenim cum in Solutione generali Problematis de Duratione Ludorum, tales obvenissent Series, quod quidem eo tempore fuerat a me obiter animadversum, credideram me non male collocaturum operam, si earum proprietates quam accurate poteram exquirerem: et quidem cum aliquid temporis in hac Speculatione impendissem, plurima ad hanc rem spectantia mihi comperta fuere, quarum ope mihi patuit Solutio difficiliorum aliquot Problematum quae, cum ad Doctrinam Ludorum praecipue spectarent, fuerant a me exhibita in libro Anglice conscripto circa Ludos, et Anno 1716 in lucem emisso[310]; sed cum Demonstrationes aliquot praetermisissem, eas Chartis commissas apud Cl. Newtonum 22° Maii 1718 reposueram, donec per biennium ab eo servatas, cum quibusdam aliis, coram Regia Societate protuleram 5° Maii 1720: excerpta autem quaedam ex iis, instigante viro eruditissimo Johanne Machin Societatis Regiae Secretario, publici juris facta sunt, Anno 1722: jam omnia quae ad hoc Lemma[311] spectant una cum Methodo Investigationis huc transferenda censui.

Demnach hatte DE MOIVRE seine Ergebnisse am 22. 5. 1718 (a. S.) bei NEWTON hinterlegt. Daß diese hinterlegten Papiere bereits die gesamte in den *MA* dargestellte Theorie umfaßten, wird klar aus einer Bemerkung DE MOIVRES in den

[308] *PT* Nr. 278 für März/April 1702, S. 1126.

[309] *MA*, S. 26f.

[310] Das Manuskript zur ersten Auflage der *Doctrine of Chances* war wohl 1716 bereits abgeschlossen. Das Buch erschien aber erst 1718 in einer ziemlich geringen Auflage, wie aus einem Brief FRANZ CHRISTS, der sich zu dieser Zeit in England aufhielt, an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 17. 10. 1718 hervorgeht.

[311] Lemma II von Buch I der *MA*. Ebenda S. 4. In diesem Lemma wird die Partialbruchzerlegung behandelt.

PT für 1722[312], in der DE MOIVRE die dort veröffentlichten Propositionen als *Corollaria ex altera Propositione maxime generali quam exhibuimus coram Regali Societate, Maii 5° 1720* charakterisierte.

Die allgemeine Proposition lautet:

Data serie quavis recurrente quarum Termini quotlibet primi ad libitum sumantur; dato etiam Indice Relationis Terminorum sequentium ad praecedentes, invenire Terminum quemlibet assignatum in hac serie, priusquam summa seriei sit cognita.

Das heißt, DE MOIVRE hatte neben den in der *Doctrine* 1718 publizierten Ergebnissen auch bereits — modern gesprochen — die Lösung der homogenen linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten gefunden.

Über den Beginn seiner Untersuchungen gibt DE MOIVRE nur an, daß er nach der Edition der *Mensura Sortis* in den *PT* für 1711 auf diese Reihen gestoßen war.

Daß DE MOIVRE bereits Anfang 1714 mindestens zu Teilergebnissen gekommen war, zeigen seine Briefe an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 3. 3. 1714 (a. S.):

J'ay été obligé moy même de résoudre quelques Equations, mais elles servent seulement à sommer les Suites je croy que Vous trouverez qu'il y a quelque chose d'assez remarquable dans ces suites, scavoir la relation qu'elles ont entre elles, et que la manière de les sommer est singulière, j'oserois presque affirmer qu'il n'y a point de Problème qui regarde le Hazard qui ne puisse se réduire à une ou plusieurs de ces suites, et que si le Problème peut se résoudre par de nombres exacts, ces suites seront toujours sommables, parceque les termes de chaque suite auront toujours des relations données aux termes suivants ou aux précédents,

und an MONTMORT vom 12. 7. 1714 (a. S.)[313]:

Si series aliqua ita sit constituta, ut continue decrescat et terminus quivis habeat ad praecedentes quos libet rationes datas sive easdem sive diversas, series ista accurate summabitur, etiamsi singuli termini multiplicentur per terminos progressionis geometricae singuli per singulos ...

In diesem etwas vagen *stetigen Abnehmen* der Glieder steckt das Bewußtsein um eine für die Konvergenz einer Reihe notwendige Bedingung.

Die beiden Briefstellen machen wahrscheinlich, daß DE MOIVRE um diese Zeit bereits über die dann 1718 in der *Doctrine* veröffentlichten Ergebnisse verfügte.

Da DE MOIVRE schon 1718, als er zum ersten Mal über r.R.n publizierte, die in den *MA* entwickelte Theorie abgeschlossen hatte, möchte ich sofort auf die Darstellung der r.R.n in den *MA* eingehen und die an Hand der schrittweisen Lösung des Problems der Spieldauer[314] als wahrscheinlich anzusehende Entwicklung durch die Reihenfolge der Ergebnisse kennzeichnen.

DE MOIVRE gibt zunächst die folgenden Definitionen für r.R. bzw. Folge[315] und die zugehörige *scala relationis*[316] (abgekürzt sc. rel.):

Si Series aliqua ita sit constituta, ut assumptis in ea ad libitum terminis quotlibet, terminus quisque subsequens ad eundem semper antecedentium numerum habeat rationes datas, talem seriem voco recurrentem; hujusmodi est subjecta Series.

---

[312] *PT* Nr. 373, 1722, S. 162—178.

[313] Zur Datierung dieses Briefes siehe 2.3.3. Die hier zitierte Stelle findet sich im Brief MONTMORTS an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 15. 8. 1714 (n. S).

[314] Siehe 6.1.

[315] Das lateinische Wort *series* wird von DE MOIVRE zugleich für Reihe und Folge verwendet.

[316] *MA*, S. 27.

$A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F$

$1 + 2x + 3xx + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5$ *etc. in qua*

$D = 3Cx - 2Bxx + 5Ax^3.$

$E = 3Dx - 2Cxx + 5Bx^3.$

$F = 3Ex - 2Dxx + 5Cx^3.$

etc.

Quantitates autem $3x - 2xx + 5x^3$, *vel etiam* $3 - 2 + 5$ *simul sumptas subque propriis suis signis connexas, voco Indicem seu Scalam relationis.*

In der *Doctrine* von 1718 hatte DE MOIVRE festgestellt, daß insbesondere die arithmetischen Reihen zu den r.R.n gehören und daß für eine arithmetische Reihe n-ter Ordnung die sc.rel. gerade $\sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} \binom{n+1}{\nu}$ ist, und umgekehrt die r.R.n, deren sc.rel. von dieser Form verschieden ist, keine arithmetischen Reihen sind; d.h. es gibt dann kein n, so daß die $(n+1)$-ten Differenzen der Gliederfolge verschwinden.

Ursprünglich hatte sich DE MOIVRE mit der Summierung der r.R.n beschäftigt. Er hat in den *MA* die in den Briefen an MONTMORT 1714 und in der *Doctrine* 1718 formulierte Bedingung eines kontinuierlichen Abnehmens der Reihenglieder wie überhaupt irgendwelche Konvergenzbetrachtungen weggelassen und damit die r.R.n als formale (Potenz-) Reihen behandelt. DE MOIVRE berücksichtigt dabei nur r.R.n mit einer zwei- oder dreigliedrigen sc.rel. Ich zitiere hier nur die (analog auf die mehrgliedrige anwendbare) Behandlung einer zweigliedrigen sc. rel. bzw. der zugehörigen Reihe[317]:

Data Serie qualibet recurrente, $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$ *etc. cujus relationis Scala sit* $f—g$; *invenire summam talis Seriei in infinitum continuatae.*

Solutio.

Disponantur termini Seriei una cum Aequationibus adjunctis eodem ordine quo disponuntur numeri vulgares in unam summam colligendi, ut sequitur,

$$\begin{aligned} P &= P \\ Q &= Q \\ R &= fQx - gPxx \\ S &= fRx - gQxx \\ T &= fSx - gRxx \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quo facto, si summa terminorum P, Q, R, S, T *etc. in infinitum, e quibus conflatur prima Columna ponatur* $= z$; *tunc summae sequentium Columnarum sic designabuntur: ex Hypothesi est* $P + Q + R + S + T$ *etc.* $= z$, *erit igitur,* $Q + R + S + T$ *etc.* $= z - P$; *ducantur omnia in* fx, *hinc habebitur* $fQx + fRx + fSx + fTx$ *etc.* $= fxz - fPx$; *addantur utrobique* $P + Q$ *erit igitur summa* 2^{ae} *Columnae hoc est* $P + Q + fQx + fRx + fSx + fTx$ *etc.* $= P + Q + fxz - fPx$; *summa vero tertiae Columnae, statim percipitur designari oportere per* $-gxxz$; *his ita designatis, cum summa terminorum primae Columnae aequalis sit summis terminorum secundae et tertiae, perspicuum est fore* $z = P + Q + fxz - fPx - gxxz$, *sive*

$$z = \frac{P + Q - fPx}{1 - fx + gxx} = \frac{a + bx - fax}{1 - fx + gxx}.$$

Das nächste Problem war, die Summe der ersten l Glieder $\sum_{\nu=0}^{l-1} a_\nu x^\nu$ einer r.R. anzugeben. Kennt man die Koeffizienten a_l und a_{l+1} im Falle einer zweigliedrigen

[317] *MA*, S. 72f.

sc.rel., so ist die gesuchte Summe gerade die Differenz der beiden Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{l+\nu} x^{l+\nu}$, die sich aus der zuletzt vorgeführten Formel sofort ergibt[318]:

Sit Series recurrens, $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ etc. cujus termini duo primi ponantur sumi ad libitum: sit $f-g$ Scala relationis, l numerus terminorum quorum summa requiratur, $\alpha x^l+\beta x^{l+1}$, termini duo proxime insequentes ultimum datorum; his positis, erit summa desiderata

$$\frac{a+bx-x^l\cdot(\alpha+\beta x \quad -f\alpha x \quad -f\alpha x)}{1-fx+gxx}\,.$$ [319]

Das eigentliche bei der Summierung der ersten l Glieder als gelöst vorausgesetzte Problem war die Bestimmung eines a_n für beliebiges n aus der r-gliedrigen sc.rel. und den ersten r-Gliedern a_ν, $\nu=0, \ldots, r-1$. Die Lösung dieses Problems wird von DE MOIVRE sorgfältig aufgebaut. Der Grundgedanke ist, eine rekurrente Folge (abgekürzt r.F.) $((a_n))$ mit einer r-gliedrigen sc.rel. in eine Summe von r geometrischen Folgen $((a_{\varrho,n}))$, $\varrho=1, 2, \ldots, r$ aufzuspalten derartig, daß für jedes n gilt $a_n=\sum_{\varrho=1}^{r} a_{\varrho,n}$. Hat man die Anfangsglieder $a_{\varrho,0}$ und die Quotienten q_ϱ der folgen $((a_{\varrho,n}))$ bestimmt, so läßt sich a_n als $\sum_{\varrho=1}^{r} a_{\varrho,0}\cdot q_\varrho^n$ darstellen[320].

DE MOIVRE zeigt als erstes: eine geometrische Folge $((a_n))$ mit dem Quotienten m ist zunächst eine r.F. mit der sc.rel. m und weiter eine r.F. mit der sc.rel. $(m+p)-mp$, p beliebig.

Denn es gilt

1. $a_{n+1}=m\cdot a_n$
   $a_n \quad =m\cdot a_{n-1}$ oder $p\cdot a_n=mp\cdot a_{n-1}$ oder
2. $0 \quad =p\cdot a_n-mp\cdot a_{n-1}$

Addiert man 1. und 2., so erhält man

$$a_{n+1}=(m+p)\cdot a_n-mp\cdot a_{n-1}$$

Analog beweist DE MOIVRE: die geometrische Folge $((a_n))$ mit dem Quotienten m ist eine r.F. mit der sc. rel. $(m+p+q)-(mp+mq+pq)+mpq$; p, q beliebig. Er gibt weiter die entsprechende viergliedrige sc.rel. an, um dann allgemein festzustellen: *pergit autem Series talium relationum in infinitum, et lex Continuationis in promptu est.*

In einem Korollar zeigt er, daß die aus der Summe zweier geometrischer Folgen $((a_n))$ und $((b_n))$ mit den Quotienten m und p resultierende Folge $((c_n))=((a_n+b_n))$ eine r.F. mit der sc.rel. $(m+p)-mp$ ist; denn nach dem Vorhergehenden ist

$$a_{n+1}=(m+p)\cdot a_n-mp\cdot a_{n-1}$$
$$b_{n+1}=(p+m)\cdot b_n-pm\cdot b_{n-1}\,,$$

[318] *MA*, S. 74.

[319] Statt der originalen Überstreichung wurden hier Klammern gesetzt; entsprechend wurde der Multiplikationspunkt verwendet. Die Schreibweise des Zählers entspricht einer Zusammenfassung der zur selben Potenz von x gehörigen Koeffizienten in Spalten.

[320] Diese Entwicklung findet sich in den *MA*, S. 27—35.

und damit ist

$$c_{n+1} = (m+p)\cdot c_n - mp\cdot c_{n-1}.$$

Die Folgerung aus dem Bisherigen zieht DE MOIVRE in einem dritten Korollar, das durch das zweite vorbereitet wird[321]:

Si sit Series aliqua ita constituta, ut Terminus quisque ad duos proxime antecedentes semper habeat rationes datas, ponaturque Scala relationis $a-b$, tum fingatur $xx-ax+b=0$, cujus Aequationis Radices sint m et p; poterit dividi Series data in Progressiones duas geometricas, quarum rationes sint m et p.

Pari ratione, si detur Series aliqua recurrens cujus Scala relationis sit $a-b+c$; tum fingatur $x^3-axx+bx-c=0$, cujus Aequationis Radices sint m, p, q; poterit dividi Series data in Progressiones tres geometricas, quarum rationes sint m, p, q, atque idem est processus in infinitum.

Damit hat DE MOIVRE, modern gesprochen, von der durch die sc.rel. gegebenen homogenen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten ausgehend die Einführung der charakteristischen Gleichung der Differenzengleichung motiviert.

In den Korollaren vier bis sechs werden die folgenden Aufgaben gelöst.

1. Gegeben die r.F. $((a_n))$, gesucht die sc.rel. der Folge $((a_{2n+\nu}))$, $\nu=0$ oder 1 und fest, oder gesucht die sc.rel. der Folge $((a_{3n+\nu}))$, $\nu=0$, 1 oder 2 und fest usw.
2. Gesucht die sc.rel. einer r.F. $((c_n))=((a_n\cdot b_n))$, wobei $((a_n))$ eine rekurrente und $((b_n))$ eine gegebene geometrische Folge ist.
3. Gesucht die sc.rel. der r.F. $((c_n))=((a_n\cdot b_n))$, wobei $((a_n))$ und $((b_n))$ gegebene r.F. n sind.

Nun erst kommt DE MOIVRE zur Lösung des eigentlichen Problems[322]:

Si detur Series aliqua recurrens cujus relationis Scala utcunque componatur ex data partium multitudine; dabitur in illa Serie terminus quilibet cujus locus sit assignatus,

die in der folgenden *Demonstratio* erläutert wird:

Sit Series recurrens $a+br+crr+dr^3+er^4$ etc. cujus Termini vocentur P, Q, R, S, T etc. Sitque Scala relationis ex quatuor partibus conflata, ita ut sit $T=frS-grrR+hr^3Q-kr^4P$, et sic de caeteris: fingatur Aequatio $x^4-frx^3+grrxx-hr^3x+kr^4=0$, e Scala relationis desumpta; sint m, p, q, s Radices hujus Aequationis; poterit igitur Series proposita dividi in quatuor Progressiones geometricas sequentis formae

$$\begin{array}{llllll} A & +Am & +Amm & +Am^3 & +Am^4 & \text{etc.} \\ B & +Bp & +Bpp & +Bp^3 & +Bp^4 & \text{etc.} \\ C & +Cq & +Cqq & +Cq^3 & +Cq^4 & \text{etc.} \\ D & +Ds & +Dss & +Ds^3 & +Ds^4 & \text{etc.} \end{array}$$

unde, comparatione facta horum terminorum cum terminis Seriei propositae, orientur quatuor Aequationes, quibus determinentur quantitates assumptae A, B, C, D, nimirum

$$\begin{array}{llllll} A & +B & +C & +D & = a \\ Am & +Bp & +Cq & +Ds & = br \\ Amm & +Bpp & +Cqq & +Dss & = crr \\ Am^3 & +Bp^3 & +Cq^3 & +Ds^3 & = dr^3 \end{array}$$

quibus Solutis invenietur

$$A = \frac{\begin{array}{ll} dr^3 - p\cdot crr + pq\cdot br - pqs\cdot a & {}^{319} \\ -q \quad +ps & \\ -s \quad +qs & \end{array}}{(m-p)\cdot(m-q)\cdot(m-s)}.$$

[321] *MA*, S. 30.
[322] *MA*, S. 33.

Die weiteren Anfangsglieder B, C, D werden in analoger Form gegeben. Leider hat DE MOIVRE über seinen Weg zur Auflösung des linearen Gleichungssystems weder hier noch anderswo auch nur Andeutungen gemacht. Es ist jedoch vorstellbar, daß er bei der Lösung dieses Gleichungssystems bereits Determinanten äquivalente Hilfsmittel verwendet hat.

In der anschließenden *Regula Generalis*[323] wird eine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder der geometrischen Folgen im allgemeinen Fall angegeben unter der Voraussetzung, daß man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bereits bestimmt hat. Denn

Jam ex sola inspectione earum Progressionum quibus Series proposita ponitur aequalis, palam est terminum quemlibet hujus Seriei cujus intervallum a primo termino designatur per l, aequalem fore quantitatibus $Am^l + Bp^l + Cq^l + Ds^l$, *at vero quantitates omnes m, p, q, s, A, B, C, D jam determinatae fuerunt, quamobrem datur terminus quilibet Seriei cujus locus sit assignatus.*

Dieses letzte Ergebnis ist quasi-allgemein für eine viergliedrige sc.rel. formuliert.

DE MOIVRE hat die Voraussetzung für diese Lösung, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell und voneinander verschieden sein müssen, nicht formuliert. Er hat allerdings den Fall von zwei komplexen Wurzeln bei einer zweigliedrigen sc. rel. gesondert behandelt[324]. Die arithmetischen Reihen, bei denen ja die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen alle gleich sind, hat DE MOIVRE in dem Abschnitt *De Methodo Differentiarum* betrachtet[325].

In dem sich an die *Regula Generalis* anschließenden Theorem 5 stellt DE MOIVRE fest: *Si Unitas dividatur per Multinomium quodcunque a Radicalitate immune, Quotiens constituet Seriem recurrentem.* Die sc.rel. dieser durch formale Division entstehenden Reihe ist, wie DE MOIVRE beweist $\sum_{\nu=1}^{n} (-a_\nu)$ wenn das Ausgangspolynom *(Multinomium)* gleich $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ und $a_0 = 1$ ist.

In Theorem 6 werden dann die sich aus dieser r. R. ergebenden Anfangsglieder der zugehörigen geometrischen Folgen berechnet. Der Nenner dieser Anfangsglieder ist wie in der *Regula Generalis* jeweils das Produkt der Differenzen zwischen einer Wurzel x_k und allen übrigen Wurzeln x_i, $i \neq k$ der charakteristischen Gleichung. Dieses Produkt wird in Lemma 3 des ersten Buches bestimmt[326]:

Data una aliqua ex Radicibus Aequationis cujuscunque, invenire productum differentiarum omnium huic Radici et Radicibus reliquis interjacentium.

Solutio.

Aequatione, si opus sit, rite praeparata, tractetur incognita perinde ac si esset indeterminata: tum assumpta Aequationis Fluxione, dividantur singuli termini per Fluxionem indeterminatae, quibus factis, loco incognitae z substituatur valor ejus quilibet cognitus, et terminorum omnium aggregatum ex hac operatione nascentium quaesito satisfacient.

Sind die Wurzeln des Polynoms $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ gleich x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dann ist $\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)$ gleich der Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_k.

[323] *MA*, S. 34f.
[324] *MA*, S. 84.
[325] *MA*, S. 152f.
[326] *MA*, S. 5.

Die Begründung für das Lemma gibt DE MOIVRE im zweiten Buch[327]. Damit ist die Theorie der r.R.n, wie sie DE MOIVRE bis 1718 entwickelt hatte, abgeschlossen.

DE MOIVRE hatte in der *Doctrine* nur andeutungsweise von einer allgemeinen Regel gesprochen, deren Kenntnis er durch seine Lösung des Problems der Spieldauer bewies. MONTMORT, der diesen Zusammenhang nicht erkannt hatte, schrieb am 31. 12. 1718 (n.S.) an NIKOLAUS I BERNOULLI:

Je tiens ce problème très difficile trouver tel terme que l'on voudra d'une suitte formé sur un index quelquonque ... Mais je le repète: la solution generalle est fort difficile et je parirois que M. Moivre ne l'a pas.

NIKOLAUS meinte in seinem Antwortbrief vom 1. 4. 1719 (n.S.):

Je suis de Vôtre avis quand Vous dites qu'il est très difficile de trouver un terme quelquonque d'une suite formée sur un index quelquonque, mais je ne sçai pas si Mr. de Moivre prétend savoir la solution générale de ce Problème, peut être parle-t-il seulement d'un cas particulier ...

NIKOLAUS zeigte im selben Brief, daß er ebenso wie MONTMORT ein beliebiges Glied der r.R. im Falle einer zweigliedrigen sc. rel. bestimmen kann. Neben einigen Beispielen brachte NIKOLAUS auch den folgenden Spezialfall der später von DANIEL BERNOULLI entwickelten Anwendung der r.R.n zur Approximation von Gleichungswurzeln:

Les termes d'une suite, dont l'index est $m+n$, servent pour trouver par approximation la racine quarrée de $mm+4n$, car si l'on prend deux termes consecutifs, le double du second divisé par le précédent moins m approchera de la racine de $mm+4n$ d'autant de plus prés que les quantiémes des termes seront plus grands. Mon Oncle m'a donné occasion de faire cette remarque il y a longtemps en me faisant voir que les termes de cette suite $1+1+2+3+5+8+13+$ etc. donnent la racine de 5.

NIKOLAUS' Regel besagt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a_{n+1}}{a_n}-m\right)=\sqrt{m^2+4n},$$

wenn (a_n) eine r.F. mit der sc.rel. $m+n$ ist. Diese Regel ist aber gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}+n}$, wobei hier die rechte Seite der Gleichung die absolute größere Wurzel der charakteristischen Gleichung $x^2-mx-n=0$ (m positiv) ist. Damit hat NIKOLAUS im Fall einer zweigliedrigen sc.rel. die Regel DANIEL BERNOULLIS vorweggenommen. Die Idee zu dieser Regel schreibt NIKOLAUS seinem Onkel JOHANN I BERNOULLI zu, der ihn schon vor längerer Zeit darauf aufmerksam gemacht hatte, daß man in dieser Weise mit den Gliedern der FIBONACCI-Folge[328] $\sqrt{5}$ approximieren könne[329].

[327] *MA*, S. 39—41.

[328] Im *Liber Abbaci* des um 1200 lebenden LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, findet sich die berühmte Kaninchenaufgabe. LEONARDO gibt die *Fibonacci-Folge* $((a_n))$, deren Glieder a_n die Anzahl der Paare von Kaninchen nach n Monaten darstellen, in Form einer Tabelle an. Siehe *Liber Abbaci*, hrsg. von B. BONCOMPAGNI, Rom 1857, S. 284. F. S. BODENHEIMER hat diese Tabelle als ein frühes Beispiel von Populationsgradation in den *Archives internationales d'Histoire des Sciences A 11*, 1958, S. 27f. gewürdigt.

[329] Bei der *Fibonacci-Folge* ist $m=n=1$ und damit $\sqrt{m^2+4n}=\sqrt{5}$.

Mit $a_{11}=144$ und $a_{12}=233$ ergibt sich für $\frac{2a_{12}}{a_{11}}-1$ der Wert 2,236111..., der von $\sqrt{5}$ um weniger als $5\cdot10^{-5}$ abweicht.

Im Folgenden tat Nikolaus de Moivre Unrecht mit der Behauptung:

Mr. de Moivre a pû voir non seulement dans cette page 330[330]*, mais aussi dans une de mes lettres où je lui ai communiqué ma regle que Vous cités dans Vôtre lettre, que je savois sommer les suites de son second Lemme*[331]*, et il auroit du reconnoitre que nous lui avons donné occasion de penser à ces choses*[332].

De Moivre hatte Nikolaus I Bernoulli im Brief vom 3. 3. 1714 (a. S.) seine Ergebnisse über r. R.n angedeutet und deren Anwendungsbereich umrissen. Im selben Brief schrieb de Moivre, er habe die zweite Auflage von Montmorts Buch noch nicht erhalten.

In seinem letzten Brief an Montmort[333] vom 26. 8. 1719 schrieb Nikolaus I Bernoulli:

J'avois deja resolu quelques cas particuliers du Problème de Mr. de Moivre trouver l'index quelconque etc., lorsque je Vous parlé de ce Problème dans une de mes précédentes lettres, si c'est pour Vous faire plaisir, je poursuivrai ma solution et j'en chercherai une formule générale.

Diese Stelle zeigt, daß Nikolaus zu dieser Zeit die *Regula Generalis* noch nicht gefunden hatte.

Gabriel Cramer, der von Mai 1727 an etwa fünf Monate in Basel bei Johann I und Nikolaus I Bernoulli studiert hatte, teilte Nikolaus während seines anschließenden Aufenthaltes in England mit, was er von de Moivre andeutungsweise über dessen r. R.n erfahren hatte[334]. Der Antwortbrief Nikolaus I Bernoullis vom 3. 7. 1728 (n. S.) zeigt, daß Nikolaus in der Zeit nach 1719 zu den Ergebnissen de Moivres gelangt war und die r. R.n mit Erfolg auf Winkelteilungsprobleme und die damit zusammenhängende Partialbruchzerlegung anwenden konnte. Die von de Moivre mit Hilfe von r. R.n gefundene und 1718 in der *Doctrine*, 1722 in den *PT* veröffentlichte trigonometrische Lösung des Problems der Spieldauer konnte Nikolaus auf Cramers Anfrage[335] hin allerdings nicht erklären[336].

Um diese Zeit beschäftigten sich schon verschiedene Mathematiker mit den r. R.n. So schrieb Nikolaus I Bernoulli an Cramer im Brief vom 23. 3. 1729 (n. S.) von dem Erfolg Samuel Klingenstiernas (1698—1765) bei der Lösung des Problems der r. R.n ebenso wie von Daniel Bernoullis, *qui en a fait une dissertation particulière, qu' il a lué à l'assemblée des Académiens de Petersbourg*[337].

Daniels Hauptleistung in dieser Arbeit ist die schon erwähnte Wurzelapproximation von Gleichungen durch r. R.n. Sei die Gleichung in der Form x^n—

---

[330] Gemeint ist die zweite Auflage von Montmorts *Analyse*.

[331] In der ersten Auflage der *Doctrine* von 1718, S. 128.

[332] Es ist dies ein Hinweis auf den Inhalt des in der zweiten Auflage der *Analyse* veröffentlichten Briefwechsels zwischen Montmort und Nikolaus I Bernoulli.

[333] Montmort starb am 7. Oktober 1719 an Pocken.

[334] Briefe Cramers aus Cambridge vom 4. 2. 1728 (n. S.) und aus London vom 21. 5. 1728.

[335] Im Brief vom 4. 2. 1728 (n. S.).

[336] Dies geht aus den Briefen Nikolaus I Bernoullis an Cramer vom 3. 7. 1728 (n. S.) und vom 23. 3. 1729 (n. S.) klar hervor.

[337] Die Arbeit Daniels erschien 1732 unter dem Titel *Observationes de seriebus recurrentibus*, in den Commentarii Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae 3 (1728), 1732, S. 85—100.

$-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^{n-\nu}=0$ ebenso wie n beliebige reelle Zahlen u_ϱ $(\varrho=1,\ldots,n)$, die die Anfangsglieder der r.F. $((u_n))$ mit der sc.rel. $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ bilden, gegeben. DANIELs ohne Beweis veröffentlichtes Ergebnis besagt: u_{n+1}/u_n approximiert mit wachsendem n die (falls existent) absolut größte Wurzel der Ausgangsgleichung immer besser. Setzt man in der Ausgangsgleichung $1/z$ statt x, dann approximiert u_{n+1}/u_n entsprechend die absolut kleinste Wurzel von $1-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu=0$ [338].

CRAMER konnte STIRLING im Brief vom 30. 5. 1729 (n.S.) dieses Ergebnis DANIEL BERNOULLIS mitteilen und im Brief vom 26. 12. 1729 (n.S) neben dem Wortlaut des entsprechenden Teiles der Arbeit DANIELs bereits einen Beweis übersenden, der sich aus der von CRAMER nachentdeckten *Regula Generalis* DE MOIVRES leicht ergibt[339].

DE MOIVRE war von CRAMER über die Fortschritte NIKOLAUS I BERNOULLIS informiert worden; es ist anzunehmen, daß ihm STIRLING, mit dem DE MOIVRE befreundet war, diese Entdeckung DANIEL BERNOULLIS mitgeteilt hat. Diese Mitteilungen dürften auch ein Grund für DE MOIVRES ausführliche Erklärung in den *MA* zur Sicherung seiner Priorität gewesen sein. In Petersburg beschäftigten sich in der Folge neben DANIEL BERNOULLI auch CHRISTIAN GOLDBACH (1690 bis 1764) und EULER mit den von DE MOIVRE gefundenen r.R.n[340].

5.3. De Moivres und Stirlings Approximationen von Binomialkoeffizienten und $\log(n!)$ für sehr große n

Gegen Ende des Jahres 1721 war DE MOIVRE von einem seiner Schüler, dem Schotten ALEXANDER CUMING, eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgelegt worden[341], deren Lösung einmal die Abschätzung von $\binom{2m}{m}\cdot 2^{-2m}$, also des Verhältnisses des mittleren Gliedes der Entwicklung $(1+1)^{2m}$ zur Summe aller Glieder, und dann die Abschätzung des Verhältnisses des mittleren Gliedes zu einem Glied mit dem Indexabstand p, also von $\binom{2m}{m}$ zu $\binom{2m}{m\pm p}$, für sehr große m erforderlich machte.

DE MOIVRE entwickelte damals in kurzer Zeit zwei Approximationsformeln[342]:

$$\text{für } \left(\binom{n}{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)\cdot 2^{-n} \text{ den Wert } \frac{2{,}168\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n-1} \text{ und für } \binom{2m}{m}:\binom{2m}{m\pm p}$$

$$\text{den Wert } \frac{(m+p-1)^{m+p-\frac{1}{2}}\cdot(m-p+1)^{m-p+\frac{1}{2}}\cdot(m+p)}{m^{2m+1}}.$$

[338] Bei DANIEL steht nur das Ergebnis ohne den Übergang von x zu $1/z$.

[339] Siehe CH. TWEDIE a.a.O., S. 111 und 114f.

[340] Für den Gedankenaustausch über rekurrente Reihen in Petersburg vor allem zwischen DANIEL BERNOULLI und GOLDBACH siehe J.E. HOFMANN (6) a.a.O., S. 160—163.

[341] *MA*, S. 99—102, vergleiche auch 6.2.

[342] *MA*, S. 102f.

Zur Bestätigung der Güte dieser Näherung stellte DE MOIVRE eine Tafel für die Logarithmen von $n!$, mit $n = 10$ beginnend und jeweils um 10 fortschreitend bis $n = 900$, auf. Ein Vergleich zwischen den mit der Tafel und den mit den beiden Formeln berechneten Verhältnissen zeigte folgendes Ergebnis[343]:

Comparavi mihi Tabulam exhibentem denas quasque summas novies Centenorum Logarithmorum, ad quatuordecim loca decimalium computatam, ex qua mihi constat me posse, in magna qualibet potestate, per superiorem Canonem, invenire rationem Termini medii, ad Terminum quemlibet distantem a medio per intervallum haud ita magnum, ad sex aut septem loca Decimalium, et rationem termini medii ad terminum distantem ab ipso per intervallum quantumvis magnum, ad tria vel saltem duo loca Decimalium.

Er bestätigt diese Genauigkeit für $n = 900$ und $p = 30$.

DE MOIVRE wußte bereits[344], daß $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$:

Cum vero quantitas $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ [286] *, sit fere quantitas data ut pote quae sit proxime aequalis Seriei infinitae,* $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}$ *etc. qua numerus respondens logarithmo Hyperbolico* -1 *exhibetur, sequitur ...*

Setzt man in DE MOIVRES erste Formel e^{-1} für $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, so erhält man für $\binom{n}{\binom{n}{2}}$ bei sehr großem n den Approximationswert $\frac{2^n \cdot a}{n}$, wobei $a = 0{,}7975\ldots$ ist. Bei Benutzung der nach STIRLING benannten asymptotischen Formel[345] für $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$ erhält man für a den Wert $0{,}7978\ldots$.

Den Weg, auf dem DE MOIVRE zu seinen Formeln gelangt war, schildert er in dem Kapitel *De Regressu e Serie data ad Summam*[346].

Zuerst stellt er fest:

$$\binom{2m}{m} = \frac{2m}{m} \cdot \prod_{\nu=1}^{m-1} \frac{m+\nu}{m-\nu}$$

und entsprechend

$$\ln\binom{2m}{m} = \ln 2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \ln\frac{m+\nu}{m-\nu}.$$

Auf diese letzte Darstellung kann DE MOIVRE die damals längst bekannte Entwicklung für $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$ anwenden[347]:

---

[343] *MA*, S. 103.

[344] *MA*, S. 128.

[345] Diese Formel steht — man könnte fast sagen natürlich — nicht bei STIRLING. Sie läßt sich aber aus seiner Entwicklung des dekadischen Logarithmus von $n!$ leicht ableiten oder besser motivieren, indem man nur die ersten beiden Glieder und die Konstante berücksichtigt. Siehe *Methodus Differentialis*, S. 137.

$$\log n! = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{n+\frac{1}{2}}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{24\cdot(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{7}{2880\cdot(n+\frac{1}{2})^3} \pm \ldots,$$

wobei mit log der dekadische Logarithmus gemeint ist. Daraus ergibt sich wegen $\ln c = \ln 10 \cdot \log c$: $\ln n! \sim \frac{1}{2}\ln 2\pi + (n+\frac{1}{2})\ln n - n$.

[346] *MA*, S. 123—129.

[347] *MA*, S. 125.

Ex quo sequitur Logarithmos factorum per Series infinitas exhibitos, sic prodituros.

$$\left.\begin{array}{l} 2\ in\ \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9}\ \ etc. \\ 2\ in\ \frac{2}{m} + \frac{8}{3m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \frac{512}{9m^9}\ \ etc. \\ 2\ in\ \frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9}\ etc. \\ etc. \end{array}\right\} + \log 2.$$

Nun summiert DE MOIVRE über die Spalten dieser Reihen und erhält für die n-te Spalte

$$\frac{2}{(2n-1)\cdot m^{2n-1}} \cdot \sum_{\nu=1}^{m-1} \nu^{2n-1}.$$

Für diese Summen hatte JAKOB BERNOULLI[348] Polynome in $(m-1)=s$ gefunden, die DE MOIVRE hier anwendet:

Summa Columnae I. erit, $\frac{ss+s}{m}$

$$II \ldots \frac{\frac{1}{2}s^4+s^3+\frac{1}{2}ss}{3m^3}$$

$$III \ldots \frac{\frac{1}{3}s^6+s^5+\frac{5}{6}s^4-\frac{1}{6}ss}{5m^5}$$

$$IV \ldots \frac{\frac{1}{4}s^8+s^7+\frac{7}{6}s^6-\frac{7}{12}s^4\ etc.}{7m^7}$$

$$V \ldots \frac{\frac{1}{5}s^{10}+s^9+\frac{3}{2}s^8-\frac{7}{5}s^6\ \text{etc.}}{9m^9}$$

etc.

Verum ut summae summarum possint obtineri, eas iterum distribuo in Columnas perpendiculares, quarum prima, posito $s/m=x$; erit

$$s\ in\ x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}x^5 + \frac{1}{4\cdot 7}x^7 + \frac{1}{5\cdot 9}x^9\ etc.\ sive$$

$$s\ in\ \frac{2x}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 4}x^3 + \frac{2}{5\cdot 6}x^5 + \frac{2}{7\cdot 8}x^7 + \frac{2}{9\cdot 10}x^9\ etc.$$

Nun wendet DE MOIVRE die von ihm zu Anfang dieses Kapitels erwähnte Methode zur Darstellung von speziellen Reihen in geschlossener Form an: Durch Integration oder Differentiation einer in eine Reihe entwickelten Ausgangsfunktion zu der vorgegebenen Reihe zu gelangen.

Als Ausgangsfunktion wählt DE MOIVRE $\ln\frac{1+x}{1-x}=v$ [349]:

Pone $\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9\ etc.\ seu\ \log\frac{1+x}{1-x}=v; \ldots\ assumptis$ *utrinque Fluentibus, invenietur*

$$\frac{2x^2}{1\cdot 2} + \frac{2x^4}{3\cdot 4} + \frac{2x^6}{5\cdot 6} + \frac{2x^8}{7\cdot 8}\ etc. = x\log\frac{1+x}{1-x} - \log\frac{1}{1-xx}.$$

[348] DE MOIVRE konnte diese Summentabelle bzw. die allgemeine Formel für die Summe der ersten l zur Potenz c (c natürlich) erhobenen natürlichen Zahlen der *AC*, S. 97 entnehmen. Den Empfang der *AC* hatte DE MOIVRE im Brief an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 3. 3. 1714 (a. S.) bestätigt.

[349] *MA*, S. 126.

Porro facta divisione utrinque per x, et multiplicatione per s; seu, quod eodem recidit, facta utrinque multiplicatione per m, invenietur Series proposita ... $= (2m-1)\log(2m-1) - 2m\log m$ [286].

Damit ist ein geschlossener Ausdruck für die erste Spalte gefunden.

Die zweite Spalte

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s^{2\nu-1}}{(2\nu-1)\,m^{2\nu-1}}$$

erkennt DE MOIVRE als gleich $\frac{1}{2}\log\frac{m+s}{m-s} = \frac{1}{2}\log(2m-1)$. Zieht man von der Summe der ersten beiden Spalten $\ln 2^{2m} = 2m\ln 2$ ab und addiert dem bisher nicht berücksichtigten Faktor 2 entsprechend $\ln 2$, so erhält man

$$(2m-\tfrac{1}{2})\ln(2m-1) - 2m\ln 2m + \ln 2,$$

cui, propter $2m=n$, *respondet numerus* $\frac{2\cdot(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, *quo fere designatur ratio termini medii ad summam terminorum omnium in potestate cujus index est n.* Damit hat DE MOIVRE eine erste Näherung für $\binom{2m}{m}\cdot 2^{-2m}$.

Eine Berücksichtigung der weiteren Spalten führt zu einem verbesserten Approximationswert. Für die dritte Spalte erhält DE MOIVRE den Wert

$$\frac{1}{6m}\cdot\frac{(m-1)^2}{2m-1},$$ für die vierte $$\frac{(4m^4+2m^3+3m^2-4m+1)\,(m-1)^2}{180m^3\cdot(2m-1)^3}.$$

Auf die Berechnung der weiteren Spalten verzichtet DE MOIVRE und vereinfacht die Betrachtung durch den Grenzübergang m gegen Unendlich:

pone igitur m infinitam, tunc summa primae seriei rationalis redigetur ad $\frac{1}{12}$ [350], *summa secundae ad* $\frac{1}{360}$; *sic fit, ut Summae serierum omnium confecturae sint Seriem unicam* $\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$ *etc., cujus tot termini erui poterunt quot libitum erit; sed in his quatuor constiti, utpote qui suppeditaturi essent approximationem satis accuratam.*

DE MOIVRE erklärt diese in Wirklichkeit divergente Reihe[351] für konvergent und benutzt für seine Approximation gerade die ersten vier ein konvergentes Verhalten vortäuschenden Glieder. Die Summe dieser ersten vier Glieder ergibt auf sechs Dezimalen genau den Wert $0{,}080754 \approx \ln 1{,}0841$. Addiert man dazu aus der ersten Näherung $\ln 2$, so erhält man $\ln 2{,}168|2$ und damit die von DE MOIVRE angegebene Konstante.

Analog geht DE MOIVRE bei der Ableitung der Approximationsformeln für

$$\binom{2m}{m} : \binom{2m}{m+p} = \frac{m+p}{m}\cdot\prod_{\nu=1}^{p-1}\frac{m+\nu}{m-\nu}$$

vor.

---

[350] Gemeint ist die dritte Spalte.

[351] Es ist dies die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{2\nu\cdot(2\nu-1)}$, wobei die $B_{2\nu}$ die *Bernoullischen Zahlen* sind.

JAMES STIRLING hatte sich ab 1725 ebenfalls mit dem Problem der Abschätzung von $\binom{2m}{m} \cdot 2^{-2m}$ beschäftigt. Es war wiederum ALEXANDER CUMING, der, als ihm STIRLING seine Methoden zur Interpolation und zur Summation von Reihen zeigte, die Anregung gab, das von DE MOIVRE bereits befriedigend gelöste Problem mit Hilfe der Differenzenrechnung erneut zu bearbeiten. STIRLING berichtet, daß er erst nach langer Zeit zu einer Lösung kam. Das Ergebnis teilte STIRLING DE MOIVRE ohne Beweis mit. DE MOIVRE bat STIRLING darauf, diese Lösung in den *MA* veröffentlichen zu dürfen. STIRLING willigte ein und überließ DE MOIVRE seine Entwicklung in Form eines offiziellen Briefes vom 19. 6. 1729 (a. S.), der dann in den *MA* abgedruckt wurde[352]. STIRLING hatte die folgenden Reihen entwickelt:

Si Index Dignitatis sit numerus par, appelletur n; vel si sit impar, vocetur n—1; eritque ut Uncia media ad summam omnium ejusdem Dignitatis, ita unitas ad medium proportionale inter semicircumferentiam Circuli et Seriem sequentem

$$n + \frac{A}{2\cdot(n+2)} + \frac{9B}{4\cdot(n+4)} + \frac{25C}{6\cdot(n+6)} + \frac{49D}{8\cdot(n+8)} + \frac{81E}{10\cdot(n+10)} \text{ etc.}^{353}.$$

... Problema etiam solvitur per reciprocam illius Seriei, etenim summa omnium Unciarum est ad Unciam mediam in subduplicata ratione semiperipheriae Circuli ad Seriem

$$\frac{1}{n+1} + \frac{A}{2\cdot(n+3)} + \frac{9B}{4\cdot(n+5)} + \frac{25C}{6\cdot(n+7)} + \frac{49D}{8\cdot(n+9)} + \frac{81E}{10\cdot(n+11)} \text{ etc.}^{353}$$

Für die Ableitung seiner Formeln verwies STIRLING in diesem Brief auf sein in Kürze zu erwartendes Buch. Dieses Buch erschien nach den *MA* aber mutmaßlich noch in der ersten Hälfte von 1730 unter dem Titel: *Methodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum.* Im zweiten Teil der *Methodus*, der *Interpolatio Serierum*, bringt STIRLING zwei Beweise für diese Reihen. Der erste Beweis gibt sehr wahrscheinlich den ursprünglichen Gedankengang STIRLINGS wieder, der zweite ist sehr viel kürzer und eleganter, verwendet aber implizit das Ergebnis des konstruktiven ersten.

Im Vorwort kündigt STIRLING die *Interpolatio* als eine Fortsetzung bzw. Verallgemeinerung der von DE MOIVRE behandelten rekurrenten Reihen an und erklärt den Unterschied zu DE MOIVRE durch die Aufgabe der Konstanz der Koeffizienten der Differenzengleichung:

Deprehendi enim Inventum hocce Moivreanum continere principia generalissima et etiam simplicissima non solum in Seriebus recurrentibus, sed et in quibuslibet aliis, in quibus relatio Terminorum variatur secundum legem quamcumque regularem.

Bei seinen Interpolationen geht STIRLING allgemein von einer monotonen Folge $((a_n))$ aus, die die Knotenpunkte (n, a_n), n ganz oder natürlich, in der reellen Ebene liefert. Nach STIRLING gibt es nun genau eine stetige Funktion (*Curva*) $y = f(x)$ mit $a_n = f(n)$ für alle n [354].

Atque una eademque Curva transibit per extremitates omnium, quae quidem determinabitur ex data Aequatione ad Seriem, id est, ex data Aequatione generaliter exprimente relationem inter duas vel plures Ordinatas quasvis successivas.

[352] *MA*, S. 170—172.

[353] Hier bedeuten die Großbuchstaben jeweils das ganze vorhergehende Glied. STIRLING verwendet *uncia* im Sinn von *terminus*.

[354] *Methodus*, S. 85.

Diese Gleichung nennt STIRLING *Aequatio differentialis*, Differenzengleichung. Die Differenzengleichung leitet STIRLING aus der für die Folge $((a_n))$ geltenden Beziehung $a_n = \sum_{\nu=1}^{r} g_\nu(n)\, a_{n-\nu}$ ab, indem er n gleich z (z reell oder positiv reell) setzt, d.h. diese Relation auf die $r+1$ äquidistanten Interpolationsglieder $a_{z-\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$ überträgt[355]:

Nam Aequatio differentialis generaliter exprimit relationem inter duas quascumque Ordinatas ad certam distantiam ab invicem sitas, sive eae cadant in Serie primariarum sive in ea intermediarum.

Für den ersten Beweis der Reihe für das Verhältnis der Summe aller zum mittleren Binomialkoeffizienten setzt STIRLING die beiden folgenden Sätze voraus:

1. Ist die Folge $((a_n))$ das Produkt der Folgen $((b_n))$ und $((c_n))$, d.h. ist $a_n = b_n \cdot c_n$, dann ist das Interpolationsglied a_z gleich dem Produkt $b_z \cdot c_z$ der Interpolationsglieder von $((b_n))$ und $((c_n))$[356].
2. Sind die Folgen $((a_n))$ und $((b_n))$ mit

$$a_n = a \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{r+\nu}{p+\nu}, \qquad a_0 = a$$

$$b_n = a \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{r+\nu}{q+\nu}, \qquad b_0 = a$$

gegeben, so ist $a_{q-r} = b_{p-r}$[357].

Den Beweis des letzten Satzes deutet STIRLING nur für $(q-r)$, $(p-r)$ positiv und ganz an[358].

Betrachtet man nun die Folge der Quotienten zwischen 2^n und dem zugehörigen mittleren Binomialkoeffizienten, wobei n um jeweils zwei wächst, so erhält man mit $n = 0$ beginnend die Folge:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2 = \tfrac{2}{1}\, a_0, \quad a_2 = \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}\, a_1, \quad a_3 = \tfrac{16}{5} = \tfrac{6}{5}\, a_2, \ldots,$$

$$a_m = 2^{2m} : \binom{2m}{m} = 2^{2m-1} : \binom{2m-1}{m} = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{2\nu}{2\nu-1} = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\nu}{\nu-\frac{1}{2}}.$$

Wendet man auf diese Folge den vorhergehenden Satz an, so erhält man $r = 0$, $p = -\frac{1}{2}$, $q - r = q := m$ und damit $a_m = b_{-\frac{1}{2}}$, wobei

$$b_n = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{m+\nu} \quad \text{und} \quad b_0 = 1$$

---

[355] Propositio XVI, S. 86f.
[356] Propositio XVII, S. 88.
[357] Propositio XVIII, S. 91.
[358] Mit Hilfe der Gammafunktion ergibt sich der Beweis sofort mit dem Definitionsbereich von p, q und r, da wegen $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$

$$a_n = a \cdot \frac{\Gamma(r+n) \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(p+n) \cdot \Gamma(r)} = \frac{\mathrm{B}(r+n, p)}{\mathrm{B}(p+n, r)}$$

$$b_n = a \cdot \frac{\Gamma(r+n) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(q+n) \cdot \Gamma(r)} = \frac{\mathrm{B}(r+n, q)}{\mathrm{B}(q+n, r)}.$$

ist. Nun ist $((b_s)) = ((c_s \cdot d_s))$, mit $c_s = s!$ und $d_s = \prod_{\nu=1}^{s} \frac{1}{m+\nu}$, $d_0 = 1$. $c_{-\frac{1}{2}} (= \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi})$ hatte STIRLING vorher numerisch bestimmt. STIRLING hatte dazu das in einem Scholion[359] als Methode formulierte Verfahren einer Verschiebung der Interpolationsstelle zu einer leicht interpolierbaren und Übertragung der Interpolationsgüte durch die Differenzengleichung an die ursprüngliche Interpolationsstelle angewandt[360]. Er hatte nämlich zur Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{2})$ den Wert $\log \Gamma(11{,}5)$ approximiert durch den Funktionswert $f(10{,}5)$ des mit Hilfe einer Interpolationsformel[361] bestimmten Polynoms $f(x)$, das für $x = 5, 6, \ldots, 16$ die Werte $\log(x!)$ annimmt, und dann den zugehörigen Numerus, d.h. den Approximationswert von $\Gamma(11{,}5)$, durch $\prod_{\nu=1}^{11} \frac{2\nu-1}{2\nu}$ dividiert und den Wert 1,7724538502 erhalten, der *aequalis est Radici quadrati numeri 3.1415926 ... etc. qui denotat Circumferentiam Circuli, cujus Diameter est unitas.* Die anschließende Bemerkung, daß der Interpolationswert $a_{-\frac{1}{2}}$ der Folge $((a_n)) = (((n!)^2))$ *erit ad unitatem ut Circumferentia Circuli ad Diametrum,* scheint zu bestätigen, daß STIRLING zuerst von einer numerischen Approximation her auf das Ergebnis $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ gestoßen war[362]. STIRLING hat in den nachfolgenden Propositionen mit anderen Methoden bestätigen können $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Damit ist die Faktorfolge $((c_s))$ an der Stelle $-\frac{1}{2}$ interpoliert.

Zur Interpolation der zweiten Faktorfolge $((d_s)) = \left(\left(\prod_{\nu=1}^{s} \frac{1}{m+\nu}\right)\right)$, $d_0 = 1$ benutzt STIRLING zunächst die Differenzengleichung $d_x = (m+x+1)\, d_{x+1}$, um die Folge nach links, d.h. für negativ ganzen Index, fortzusetzen: $d_{-1} = m$, $d_{-2} = (m-1) \cdot m$, usw. Dann bildet STIRLING die neue Folge $((e_n))$ mit $e_n = d_{n-1} \cdot d_{-n} = e_{-n+1}$, n natürlich.

$e_{\frac{1}{2}}$, der Interpolationswert von $((e_n))$ zwischen e_1 und e_0, ist dann das Quadrat des gesuchten Interpolationsgliedes $d_{-\frac{1}{2}}$. Mit Hilfe einer Interpolationsformel[361] erhält STIRLING für

$$e_{\frac{1}{2}} = (d_{-\frac{1}{2}})^2 = m + \frac{m}{4 \cdot (m+1)} + \frac{9m}{32 \cdot (m+1)\,(m+2)} + \frac{75m}{128 \cdot (m+1)\,(m+2)\,(m+3)} + \cdots.$$

Bezeichnet man wie STIRLING das erste Glied der Entwicklung mit A, das zweite mit B usw. und setzt $n/2$ für m, so ist

$$e_{\frac{1}{2}} = (d_{-\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(n + \frac{A}{2\,(n+2)} + \frac{9B}{4\,(n+4)} + \frac{25C}{6\,(n+6)} + \cdots\right)$$

---

[359] *Methodus,* S. 88.

[360] *Methodus,* S. 110—113.

[361] *Methodus,* S. 105f.

[362] Daß STIRLING die Zahl 1,77... als identisch mit den ersten Dezimalstellen der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{\pi}$ erkannt hat, ist möglich. Wahrscheinlich ist, daß er $((a_n)) = (((n!)^2))$ ebenso wie die Folge $((n!))$ numerisch an der Stelle $-\frac{1}{2}$ interpoliert hat und dabei eine mit der Dezimalbruchentwicklung von π in den ersten Stellen übereinstimmende Zahl gefunden hat.

und

$$a_m = 2^{2m} : \binom{2m}{m} = b_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \cdot d_{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist die erste der DE MOIVRE mitgeteilten Reihen bewiesen. Der Beweis für die zweite läuft analog.

DE MOIVRE faszinierte an STIRLINGs Reihen, die ihm ohne Beweis mitgeteilt worden waren, vor allem das Auftreten der Kreiszahl. Er schildert in den *MA*, wie er sich immer wieder bemühte, dieses Phänomen zu begründen und schließlich zu Erfolg kam[363]:

> *cum vero aliquandiu perplexus haesissem qua via id possem consequi, cumque scirem fundamentum investigationis Cl. Viri illud fuisse ut consideraret quo pacto rationes mediae aliae ex aliis generentur, invenerat utique rationem mediam in quadrato esse* $\frac{1}{2}$, *in biquadrato* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, *in sexta potestate* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$, *in octava* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$ [286], *et sic de caeteris ...*

Diese Entwicklung der *mittleren Verhältnisse* brachte DE MOIVRE in Beziehung mit der von WALLIS gegebenen Produktentwicklung für $4/\pi$. Die von WALLIS gefundenen Ungleichungen zur Einschließung von $4/\pi$ formte DE MOIVRE etwas um und erhielt:

$$\left(\frac{2}{\pi(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\binom{n}{\frac{n}{2}}\right) \cdot 2^{-n} < \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{2 \cdot (n+2)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

DE MOIVRE, der so die Einführung von π in dieser Abschätzung auf die Autorität von WALLIS zurückführen konnte, schließt seine Betrachtung: *Has autem attuli, non quod de eis ipsi mihi quidquam sumam, sed quod vir mei amantissimus mihi suasit ut eas ederem.*

STIRLING hat in der *Methodus* einen zweiten Beweis für seine Formeln gegeben[364]. Dabei geht STIRLING von einem durch die bereits bekannte Lösung motivierten Ansatz in unbestimmten Koeffizienten für die quadrierte, der Folge $((a_n)) = \left(\left(\prod_{\nu=1}^{n} \frac{2\nu}{2\nu-1}\right)\right)$ entsprechenden Differenzengleichung aus und erhält: $a_n^2 = A \cdot n \left(1 + \frac{1}{2 \cdot (n+2)} + \frac{9}{8 \cdot (n+2)\,(n+4)} + \cdots\right)$.

Er benützt nun den ihm von DE MOIVRE mitgeteilten Gedanken einer Verbindung zwischen dem gesuchten *mittleren Verhältnis* und der WALLISschen Produktdarstellung von $4/\pi$ zur Bestimmung der Konstanten A. Aus dem letzten Ergebnis deduziert STIRLING, der T für a_n setzt:

> *Et quo major est n, eo propius Aequatio* $TT = An$, *accedet ad veritatem, quoniam Termini posteriores tandem evadent infinite minores prioribus. Igitur in Aequatione* $TT = An$, *vel* $A = \frac{TT}{n}$, *si pro n successive scribantur ejus valores,* 2, 4, 6, 8, 10, *etc. et simul quadrata Terminorum correspondentium pro* TT; *orientur Aequationes continue approximantes ad verum ipsius A valorem.*

Der Vergleich von $A = \lim_{n \to \infty} \frac{(a_n)^2}{n}$ mit dem WALLISschen Produkt lehrt STIRLING: $A = \pi/2$. Damit hat STIRLING seine numerische Entwicklung von $\Gamma(\frac{1}{2})$, die

---

[363] *MA*, S. 173f.

[364] Beweis der Formeln von Propositio XXIII, S. 122—124.

ihn auf den Wert $\sqrt{\pi}$ geführt hatte, auf anderem Wege bestätigen können. Einige Tage nach der Ausgabe der *MA*, die wohl noch im Januar 1730 erfolgte[365], teilte STIRLING DE MOIVRE seine Entwicklung von $\log(n!)$ für große n brieflich mit. Darüber berichtet DE MOIVRE in dem *Miscellaneis Analyticis Supplementum*[366] (abgekürzt *SMA*):

> *... his subjunxit seriem celerrime convergentem, cujus ope summae logarithmorum tot numerorum naturalium quot quis sumere voluerit facile obtineri possent; res autem sic exposita fuerat.*
>
> *Si sumantur tot numeri naturales quot libitum erit, quorum ultimus designetur per* $z-\frac{1}{2}$*; pone* $a=\cdot 43429448190325$*, hoc est pones a aequalem unitati divisae per logarithmum hyperbolicum numeri denarii; quo facto summa logarithmorum his numeris competentium designabitur per Seriem*

$$z\log z - az - \frac{a}{2\cdot 12z} + \frac{7a}{8\cdot 360z^3} - \frac{31a}{32\cdot 1260z^5} + \frac{63a}{128\cdot 1680z^7} \text{ etc.}^{286}$$

> *his vero adjungendus est numerus* 0,399089934179 *etc. dimidius nempe logarithmus circumferentiae circuli cujus Radius est unitas*[345].

Die STIRLINGsche Reihe für $\log(n!)$, die sich auch in der *Methodus* als Spezialfall einer ebenfalls unbewiesenen Formel für den Logarithmus des Produkts der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge findet, war mutmaßlich erst in der zweiten Hälfte von 1729 gefunden worden. Dafür spricht, daß STIRLING und MOIVRE sich damals ihre letzten Ergebnisse regelmäßig mitteilten. Außerdem bestätigt STIRLING selbst im Brief an CRAMER von September 1730, daß er, als er die erste Hälfte des Interpolationsteiles der *Methodus* in die Druckerei schickte, die zweite Hälfte noch nicht konzipiert hatte[367]. Es ist sogar wahrscheinlich, daß STIRLING seine Formel für $\log(n!)$ zur Überprüfung der von DE MOIVRE in den *MA* veröffentlichten Tabelle der Logarithmen von $n!$[368] entwickelt hat[369].

Sicher ist: DE MOIVRE hat sich erst nach Erhalt des STIRLINGschen Ergebnisses mit der Abschätzung von $\log(n!)$ für sehr große n beschäftigt. Sowohl DE MOIVRE wie auch STIRLING bestätigen diesen Sachverhalt. So schreibt STIRLING im Brief an CRAMER von September 1730[367]:

> *The 28 Prop: about the Suming of Logarithms has been Considered by Mr. de Moivre since the publication of my Book, and he has found a Series more simple than mine which is as follows ... Mr. de Moivre is to publish with his manner of finding it out, which is quite different from mine, which is done by an old and well known principle, namely the taking of the difference of the successive values of quantitys as you will see in the Book ...*[370]

---

[365] Siehe in 2.3.3. die Datierung des dort erwähnten STIRLING-Briefes.

[366] *SMA*, S. 1.

[367] Siehe TWEEDIE a.a.O., S. 119. Die Formel für den Logarithmus des Produkts der Glieder einer arithmetischen Folge findet sich in der 13. der insgesamt 18 Propositionen der *Interpolatio*.

[368] *MA*, S. 103f.

[369] STIRLING wies DE MOIVRE in dem Brief von Anfang 1730 auf Fehler in dieser Tabelle hin. Diese Mitteilung veranlaßte DE MOIVRE, der diese Logarithmen durch Summierung der *Briggschen Logarithmen* gefunden hatte, die Tabelle erneut mit Hilfe der im *Supplementum* bewiesenen Formel zu berechnen und diese verbesserte Tabelle im *Supplementum* zu veröffentlichen.

[370] Die alte Abkürzung für *the* wurde durch das Wort selbst ersetzt.

Stirling deutet hier an, daß er seinen Beweis mit Hilfe einer seiner Interpolationsformeln gefunden hatte. Die dabei auftretenden Differenzen sind jeweils logarithmische Reihen.

De Moivre benutzte für die Ableitung seiner Reihe von $\ln(n!)$ das von ihm schon bei der Approximation der Binomialkoeffizienten verwendete Verfahren[371]. Ausgehend von

$$\frac{1}{(m-1)!} = \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} \cdot m^{1-m} = m^{1-m} \prod_{\nu=1}^{m-1} \frac{m}{m-\nu}$$

berechnet de Moivre

$$\ln \prod_{\nu=1}^{m-1} \frac{m}{m-\nu} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \ln \frac{m}{m-\nu} .$$

Er schreibt die $m-1 =: l$ Reihen

$$\ln \frac{m}{m-\nu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\mu}}{\mu \cdot m^{\mu}}, \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

untereinander an und summiert über die Spalten dieser ersten *Tabula*. Die n-te Spaltensumme ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{l} \frac{\nu^n}{n \cdot m^n} = \frac{1}{n \cdot m^n} \cdot \sum_{\nu=1}^{l} \nu^n .$$

Für die Summen der n-ten Potenzen der ersten l natürlichen Zahlen benutzt de Moivre wiederum die in Jakob Bernoullis *AC* angegebenen Formeln bzw. die allgemeine Formel[348]:

$$\sum_{\mu=1}^{l} \mu^n = \frac{1}{n+1} l^{n+1} + \frac{1}{2} l^n + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2\nu-1} \frac{1}{2\nu} B_{2\nu} l^{n-2\nu+1},$$

wobei die $B_{2\nu}$ die auch schon von de Moivre so genannten *Bernoullischen Zahlen* sind. Die so erhaltenen Spaltensummen der ersten *Tabula* werden nun nach fallenden Potenzen von l geordnet, mit $n=1$ beginnend, als Zeilen einer neuen *Tabula* angeschrieben. Diese neue *Tabula* wird wiederum über die Spalten summiert. Als Ergebnis erhält de Moivre:

$$\ln \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} = (m-1) \ln m - \ln[(m-1)!]$$

$$= m - 1 - \frac{1}{2} \ln m + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{2\nu(2\nu-1)} \cdot (1 - m^{1-2\nu})$$

oder

$$\ln[(m-1)!] = \left(m - \frac{1}{2}\right) \ln m + 1 - m - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{2\nu \cdot (2\nu-1)} (1 - m^{1-2\nu}).$$

De Moivre hatte damit eine der Stirlingschen ähnliche, sogar etwas einfachere Reihe gefunden, nur war es ihm noch nicht gelungen, die Kreiszahl, die ja in Stirlings Reihe in der Konstanten $\frac{1}{2} \log 2\pi$ auftritt, in seiner Reihe nachzuweisen.

[371] *SMA*, S. 4—9.

Er müht sich deshalb mit der (divergenten Reihe): $1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{2\nu(2\nu-1)}$ ab[372], indem er mit der von STIRLING entwickelten Methode der Konvergenzverstärkung zu einem Grenzwert zu kommen sucht[373]. Im Gegensatz zu seiner Darstellung in den *MA* gibt DE MOIVRE im *Supplementum* zu, daß diese Reihe ihr anfängliches scheinbares Konvergenzverhalten nach den ersten fünf Gliedern ändert[373]:

> *Series* $1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}+\frac{1}{1680}$ *etc. quae satis commode convergit in principio, post terminos quinque primos convergentiam amittit, quam tamen postea recuperat.*

Der letzte Satz zeigt, daß für DE MOIVRE die Divergenz der Reihe, mittelbar durch die Autorität von STIRLINGs Entwicklung, unvorstellbar war. Die für ihn selbstverständliche aber nicht gegebene Konvergenz der Reihe gegen $\frac{1}{2}\ln 2\pi$ *beweist* DE MOIVRE durch Vergleich der von ihm und STIRLING entwickelten Ausdrücke für das Verhältnis des mittleren Binomialkoeffizienten zur Summe aller[374].

DE MOIVRE gelangt so — zwar durch einen Irrtum — zu der richtigen asymptotischen Reihe für $\ln(m-1)!$:

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)\ln m+\frac{1}{2}\ln 2\pi-m+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{2\nu(2\nu-1)}\cdot m^{1-2\nu}.$$

Dieselben Überlegungen führen DE MOIVRE zu einer Reihe für $\ln\prod_{\nu=1}^{l}(m-\nu d)$, $(m>ld)$[375] und den der Reihe für $\ln(n!)$ entsprechend verbesserten Entwicklungen für die Binomialkoeffizientenverhältnisse[376].

Der Verlauf dieser freundschaftlichen Konkurrenz zwischen DE MOIVRE und STIRLING ergibt: DE MOIVRE hat mit seinen ersten Untersuchungen über Binomialkoeffizienten indirekt diejenigen STIRLINGs angeregt. STIRLING hat wahrscheinlich noch 1729 eine Reihe in $(n+\frac{1}{2})$ für $\log(n!)$ entwickelt. DE MOIVRE kam kurz nach und in Abhängigkeit von STIRLING mit einer von STIRLINGs Methode verschiedenen zu einer ähnlichen Reihe[377].

6. De Moivres Beiträge zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nach seinen eigenen Angaben hat DE MOIVRE bereits als sechzehnjähriger den Tractat *De Ratiociniis in Aleae Ludo* von CHRISTIAAN HUYGENS gelesen[378].

---

[372] EULER wies im 11. Abschnitt der Arbeit *Consideratio Progressionis cujusdam ad Circuli Quadraturam inveniendam idoneae* a.a.O. nach, daß die BERNOULLIschen *Zahlen* von einem bestimmten Index an schneller als jede vorgegebene geometrische Reihe wachsen: *Leonhardi Euleri Opera* (1) XIV, S. 357.

[373] *SMA*, S. 9f.

[374] *SMA*, S. 10f.

[375] *SMA*, S. 11—15.

[376] *SMA*, S. 15—18.

[377] Zu diesem Thema sind von ENESTRÖM, TWEEDIE und KARL PEARSON und von anderen in Abhängigkeit von diesen mehr oder weniger unpräzise oder gar unrichtige Darstellungen gegeben worden.

[378] Siehe 2.1. und 3.

Huygens' Abhandlung, in der alle Aufgaben auf eine einzige Methode zurückgeführt werden, wurde nach mehr als einem halben Jh. in ihrer Bedeutung als Grundlage für die Glücksspielwahrscheinlichkeitsrechnung abgelöst durch den *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* des französischen Adligen Pierre Rémond de Montmort. Francis Robartes, ein englischer Adliger, der sich selbst mit Wahrscheinlichkeitsproblemen beschäftigte[379], hatte de Moivre auf Montmorts Buch aufmerksam gemacht und ihm dabei, wie de Moivre berichtet, einige Aufgaben von größerer Schwierigkeit als die im *Essay* gelösten vorgelegt[380]:

> ... *which having solved to his* [Robartes'] *Satisfaction, he engaged me to Methodise those Problems, and to lay down the Rules which had led me to their Solution. After I had proceeded thus far, it was enjoined me by the Royal Society, to communicate to them what I had discovered on this Subject, and thereupon it was ordered to be published in the Transactions* ...

Über seine Literaturkenntnisse vor Abfassung der in den *PT* für 1711 erschienenen *Mensura Sortis* schreibt de Moivre ebenfalls im Vorwort zur *Doctrine* von 1718:

> *I had not at that time read any thing concerning this Subject, but Mr. Huygens's Book, de Ratiociniis in Ludo Aleae, and a little English Piece (which was properly a translation of it) done by a very ingenious Gentleman*[381] ... *As for the French Book*[382]*, I had run it over but cursorily* ...

Trotz dieser Beteuerung de Moivres ist man nach einem Vergleich geneigt, die Verdienste Montmorts um de Moivres erste Arbeit höher einzuschätzen als de Moivre selbst.

In der Francis Robartes zugedachten Widmung der *Mensura Sortis* gibt de Moivre als wichtigste Methoden an[383]:

> *Methodus qua potissimum utor, est Doctrina Combinationum, qua probe intellecta, facilis se prodit Solutio plurium Problematum alioqui difficillimorum; verum huic methodo non ita memet adstrinxi, quin aliquando Series infinitas etiam adhibuerim, praesertim ubi prioritas ludendi consideranda venit.*

1712 hatte de Moivre den für Montmorts zweite Auflage des *Essay* mitverantwortlichen Nikolaus I Bernoulli persönlich in London kennengelernt[384]. Im Anschluß daran korrespondierte de Moivre mit Nikolaus I Bernoulli wie später mit Montmort über Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung[385]. Der Briefwechsel zwischen Montmort und Nikolaus I Bernoulli von 1712 bis 1719 zeigt ebenso wie das Verhalten de Moivres, daß auf beiden Seiten die Weiterentwicklung Wettbewerbscharakter angenommen hatte.

---

[379] Siehe dazu die in den *MA*, S. 224 veröffentlichte, von Robartes vor 1688 aufgestellte Tafel für die Anzahl der Gewinnmöglichkeiten des Würfelspiels *Raffling*. Robartes ist nach Todhunter (siehe a.a.O., S. 54) auch mit dem als Francis Roberts bezeichneten Verfasser des in den *PT* Nr. 198, 1693, S. 677—681 veröffentlichten Artikels: *An Arithmetical Paradox, concerning the Chances of Lotteries* identisch.

[380] Siehe *Doctrine* von 1718, *Preface* S. I.

[381] Es handelt sich sehr wahrscheinlich um das 1692 erstmalig in London verlegte von Todhunter (siehe a.a.O., S. 49) John Arbuthnot zugeschriebene Bändchen *On the Laws of Chance*.

[382] Erste Auflage des *Essay* von Montmort 1708.

[383] *PT* Nr. 329, 1711, S. 214; diese Seite ist fälschlich mit 206 paginiert.

[384] Siehe 3.

[385] Für die Korrespondenz mit Nikolaus I Bernoulli siehe 2.3.1., für die mit Montmort 2.3.3.

Zwischen der *Mensura Sortis* und der ersten Auflage der *Doctrine* war 1713 die *AC* des 1705 verstorbenen JAKOB BERNOULLI und Ende 1713 oder Anfang 1714[75] die zweite Auflage des *Essay* erschienen. Beide Bücher erhielt DE MOIVRE 1714. Anscheinend nicht gekannt hat DE MOIVRE die 1716 in holländischer Sprache veröffentlichte Wahrscheinlichkeitsrechnung von NICOLAS STRUYCK (1687 bis 1769)[386].

JOHANN I BERNOULLI, der auf dieses Werk aufmerksam geworden war, hatte MONTMORT, der das Buch schließlich kaufte, gegenüber betont[387], daß STRUYCKs Werk, in dem MONTMORT, NIKOLAUS I BERNOULLI und auch DE MOIVRE mehrfach erwähnt sind, fast nichts Neues enthalte[388].

1718 wurde DE MOIVREs *Doctrine of Chances* veröffentlicht. In dem sehr ausführlichen Vorwort macht DE MOIVRE auf eine die später von LAGRANGE und LAPLACE entwickelte Methode der erzeugenden Funktionen vorbereitende Eigenschaft der von ihm verwendeten Reihen aufmerksam[389]:

> *Another Advantage of the Method of Infinite Series is, that every Term of the Series includes some particular Circumstance wherein the Gamesters may be found, which the other Methods do not.*

In diesem Sinne verwendet DE MOIVRE die rekurrenten Reihen zur Lösung des Problems der Spieldauer. Ihren Abschluß fanden DE MOIVREs Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 1738 publizierten zweiten Auflage der *Doctrine*, die mit geringfügigen Erweiterungen in die dritte, posthum 1756 erschienene übernommen wurde[390].

Schon im Brief an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 3. 3. 1714 (a. S.) hatte DE MOIVRE ohne weitere Angabe von seiner Lösung des *Problème de la mortalité du genre humain* berichtet. Seine damit verbundenen Ergebnisse über Rentenberechnung veröffentlichte DE MOIVRE erstmalig 1725 in einem *Annuities on Lives* betitelten Bändchen.

DE MOIVREs über seine Vorgänger hinausgehenden Leistungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden am Beispiel seiner Lösung des Problems der Spieldauer deutlich. Der von DE MOIVRE entdeckte Grenzwertsatz für binomiale

---

[386] *Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest*, Amsterdam 1716. Die französische Übersetzung dieses Werkes sowie der Arbeiten STRUYCKs über Sterbetafeln und Leibrenten durch J. A. VOLLGRAFF wurde 1912 in Amsterdam veröffentlicht.

[387] Im Brief an MONTMORT vom 8. 4. 1717 (n. S.) hatte JOHANN I BERNOULLI STRUYCKs Werk zum ersten Mal erwähnt. Ein Urteil über das Buch, dessen Erwerb MONTMORT im Brief vom 26. 1. 1718 (n. S.) an JOHANN I BERNOULLI mitteilt, gibt auch NIKOLAUS I BERNOULLI im Brief an MONTMORT vom 30. 9. 1717 (n. S.).

[388] STRUYCK hat mit seinem Buch, das sich zwar auf die beiden Ausgaben des *Essay* und die *Mensura Sortis* DE MOIVREs stützt, ein diesen Arbeiten und der *AC* durchaus vergleichbares Werk geschaffen. NICOLAS STRUYCK setzt damit und mit seinen späteren Abhandlungen vor allem über das Rentenwesen die mit den SCHOOTEN-schülern JAN DE WITT, JAN HUDDE und CHRISTIAAN HUYGENS einsetzenden niederländischen Arbeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über Leibrenten fort. Sein Werk blieb, da es nur in holländischer Sprache publiziert wurde, ziemlich unbekannt. Dies rechtfertigt allerdings nicht, daß er weder von TODHUNTER noch in den bekannten Lehrbüchern über Mathematikgeschichte dieses Zeitraumes erwähnt geschweige denn gewürdigt wurde.

[389] *Doctrine* 1718, *Preface* S. IX.

[390] Zu der scheinbar großen Erweiterung in der dritten Auflage siehe 2.2.

Verteilungen und die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Lebensversicherungsfragen werden in gesonderten Abschnitten behandelt. Als Voraussetzung für diese Abschnitte werden die von DE MOIVRE angegebenen Rechenregeln für das von ihm definierte Wahrscheinlichkeitsmaß vorgestellt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung dieser Zeit war aus der Spielpraxis entstanden. Das zeigt sich auch noch bei MONTMORT und DE MOIVRE. Was die Spieler vor allem interessierte, war der gerechte Spieleinsatz. Wegen der variablen Höhe des Gesamteinsatzes gab DE MOIVRE gewöhnlich nur die Verhältnisse der Spieleinsätze an. Ausgangspunkt waren damals nicht Wahrscheinlichkeiten sondern Wahrscheinlichkeitsverhältnisse. Die Aufgaben aus dieser Zeit beginnen etwa so:

Wenn sich die Chancen des Spielers A, ein Spiel zu gewinnen, zu denen des Spielers B verhalten wie a zu b, ...

Erst in der *Introduction* zur zweiten Auflage der *Doctrine* gibt DE MOIVRE explizit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit an, das er und seine Vorgänger implizit von Anfang an verwendet haben[391]:

> *... it is the comparative magnitude of the number of Chances to happen, in respect to the whole number of Chances either to happen or to fail, which is the true measure of Probability.*

Dieses für DE MOIVRE evidente Wahrscheinlichkeitsmaß, das heute noch fälschlich nach LAPLACE bezeichnet wird, setzt natürlich die Beschränkung auf Experimente mit gleichwahrscheinlichen Ereignissen voraus, die eine damals nicht empfundene Idealisierung der Wirklichkeit bedeutet.

Den Summensatz für disjunkte Ereignisse bringt DE MOIVRE nicht explizit, der Produktsatz wird dagegen für unabhängige wie abhängige Ereignisse formuliert.

DE MOIVRES Definitionen von unabhängig bzw. abhängig sind[392]:

> *Two events are independent, when they have no connexion one with the other, and that the happening of one neither forwards nor obstructs the happening of the other.*
>
> *Two Events are dependent, when they are so connected together as that the Probability of either's happening is alter'd by the happening of the other.*

DE MOIVRE definiert Unabhängigkeit absolut, während die Negation seiner Abhängigkeit gerade die heutige durch die Gültigkeit des Produktsatzes gegebene Unabhängigkeit liefern würde.

Den Produktsatz für in diesem Sinne unabhängige Ereignisse hatte DE MOIVRE schon in der *Mensura Sortis* gebracht[393]. Dieser Satz wird vor allem für die Wahrscheinlichkeiten bei unabhängiger Wiederholung eines Experimentes benötigt.

Für voneinander abhängige Ereignisse findet DE MOIVRE[394]:

> *... the Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the first shall have been consider'd as having happen'd.*

Hier ist bereits der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit vorbereitet, den DE MOIVRE im Folgenden noch schärfer faßt:

---

391 *Doctrine*, 1738, S. 2.
392 *Doctrine*, 1738, S. 6.
393 *PT* Nr. 329, 1711, S. 215.
394 *Doctrine*, 1738, S. 7f.

But to determine in the easiest manner possible, the Probability of the happening of several Events dependent, it will be convenient to distinguish by thought the order of those Events, and to suppose one of them to be the first, another to be the second, and so on: which being done, the Probability of the happening of the first may be look'd upon as independent, the Probability of the happening of the second, is to be determin'd from the supposition of the first's having happen'd, the Probability of the third's happening, is to be determin'd from the supposition of the first's and second's having happened, and so on: then the Probability of the happening of them all will be the product of the Multiplication of the several Probabilities which have been determined in the manner prescrib'd.

Im Anschluß daran bringt DE MOIVRE den schon vorher eingeführten Erwartungswert[395]:

... the Expectation of obtaining any Sum is estimated by multiplying the value of the Sum expected by the Fraction which represents the Probability of obtaining it,

verallgemeinert[396]:

If I have several Expectations upon several Sums, it is very evident that my Expectation upon the whole is the Sum of the Expectations I have upon the particulars.

Mit den vorher gegebenen Regeln leitet DE MOIVRE die Wahrscheinlichkeit für mindestens l-maliges Eintreten eines Ereignisses bei n-maliger (unabhängiger) Durchführung durch eine geeignete Ereignisdisjunktion des Gesamtexperiments ab[397] und bestimmt dann unabhängig davon die Wahrscheinlichkeit für genau l-maliges Eintreten, wenn sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und seines Komplements wie a zu b verhalten[398]:

... if it be requir'd to assign the Chances for throwing a certain number of Aces, and it be farther required that there shall not be above that number, then one single term of the power $(a+b)^n$ will always answer the question.

Dieses Glied wird mit $\binom{n}{l} a^l b^{n-l}$ angegeben, aus dem man durch Division mit der Anzahl aller Fälle $(a+b)^n$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält. Damit ist die Einführung der *Doctrine* von 1738 abgeschlossen, für die es kein an Geschlossenheit und Klarheit des Aufbaues der Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch nur annähernd vergleichbares Vorbild bei den Vorgängern DE MOIVRES gibt, und die als der Beginn einer Wahrscheinlichkeitstheorie angesehen werden kann.

6.1. Das Problem der Spieldauer und die Entwicklung spezieller Methoden zu seiner Lösung bei de Moivre

HUYGENS hatte am Ende seines Traktats *De Ratiociniis in Aleae Ludo* fünf Aufgaben gestellt, von denen die letzte, ursprünglich von PASCAL FERMAT vorgelegte und dann über CARCAVY an HUYGENS übermittelte lautet[399]:

A und B, von denen jeder 12 Marken besitzt, spielen mit drei Würfeln unter der Bedingung, daß A bei jedem Wurf mit 11 Augen dem B und B bei jedem Wurf mit 14 Augen dem A eine Marke geben muß. Gewinner des Gesamtspiels ist, wer zuerst alle Marken gewonnen hat.

---

[395] *Doctrine*, 1738, S. 3.
[396] *Doctrine*, 1738, S. 8.
[397] *Doctrine*, 1738, S. 13f.
[398] *Doctrine*, 1738, S. 27.
[399] HUYGENS, *Oeuvres complètes* XIV, S. 90f.

Huygens hatte das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B ohne Beweis angegeben.

Diese Aufgabe, in der das Problem der Spieldauer angeschnitten ist, wurde, z.T. modifiziert, erneut von Jakob Bernoulli, Montmort, de Moivre und Struyck gelöst. Montmort hatte in der ersten Auflage des *Essay* das Spieldauerproblem durch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gesamtspiel nach höchstens einer vorgegebenen Zahl von Einzelspielen beendet ist, erweitert. Er gab die Lösung dieses Problems unter der Voraussetzung von gleichen Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler und einem Besitz von je drei Marken ohne Beweis in der ersten Auflage an[400]. Seine und Nikolaus I Bernoullis Lösung des entsprechenden allgemeinen Problems hatte Montmort in der zweiten Auflage des *Essay* publiziert[401]. Einen von diesen Bearbeitungen verschiedenen Weg schlug de Moivre ein, der sich nach eigenen Aussagen seit 1708 mit diesem Problem auseinandergesetzt hatte[402].

Die Untersuchung, wann de Moivre welches Teilproblem bearbeitet hat, ist im folgenden untergeordnet der, wie de Moivre zusammen mit der schrittweisen Ausdehnung des Problems neue Methoden — vor allem die Theorie der rekurrenten Reihen — entwickelte, deren Anwendung schließlich zu Ergebnissen führte, die man mit den für de Moivre verfügbaren Mitteln bisher nicht ableiten konnte.

Diese Entwicklung läßt sich in den Publikationen de Moivres über Wahrscheinlichkeitsrechnung von der *Mensura Sortis* bis zur dritten Auflage der *Doctrine* verfolgen. Im wesentlichen enthält bereits die *Doctrine* von 1718 die wichtigsten Ergebnisse einschließlich einer Andeutung der trigonometrischen Lösung des Spieldauerproblems, die de Moivre in einem Aufsatz der *PT* für 1722[403] und einem Abschnitt der *MA* weiter ausführte[404].

Als Ausgangsproblem hatte de Moivre in der *Mensura Sortis* formuliert[405]:

> *A et B quorum dexteritates sint in ratione data, videlicet, ut a ad b, ea conditione ludant, ut quoties A ludum unum vicerit, B tradat ipsi nummum unum; quoties vero B vicerit, A ipsi tradat nummum unum: et non prius ludo desistant, quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit. Adstent vero spectatores duo R et S, quorum R affirmet certamen finitum iri intra datum ludorum numerum, S neget: Quaeritur expectatio ipsius S.*

Die allgemeine Lösung wird nun induktiv, von einfachen Spezialfällen ausgehend, nahegelegt[406].

Fall I. Jeder Spieler hat zwei Marken und die Anzahl der Spiele, in denen das Gesamtspiel beendet sein soll, sei ebenfalls zwei. Die Wahrscheinlichkeit p des A ein Einzelspiel zu gewinnen ist $\frac{a}{a+b}$, die Wahrscheinlichkeit q des B gleich $\frac{b}{a+b}$. Von den Gliedern $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ sind p^2 und q^2 die Wahrscheinlichkeiten, daß A bzw. B zwei Spiele hintereinander und damit das Gesamtspiel gewinnt, und

---

400 *Essay*, 1708, S. 184f.
401 *Essay*, 1713/14, S. 268—277 und S. 309f.
402 *Doctrine*, 1738, S. 181.
403 *PT* Nr. 373, 1722, S. 162—178 speziell S. 170—175.
404 *MA*, S. 76—83.
405 S. 251.
406 *Mensura Sortis*, S. 251—255.

$2pq = \frac{2ab}{(a+b)^2}$ ist die Wahrscheinlichkeit $w(S)$, daß das Gesamtspiel nach zwei Spielen nicht beendet ist.

Fall II. Jeder Spieler hat zwei Marken, das Gesamtspiel soll nach 3 Spielen entschieden sein.

Die den Wahrscheinlichkeiten p^3 und q^3 zugehörigen Ereignisse sind für R günstig. Die Wahrscheinlichkeiten $3p^2q$ und $3pq^2$ können in die Summen $3p^2q = ppq + pqp + qpp$ und $3pq^2 = pqq + qpq + qqp$ aufgespalten werden, wobei durch die Reihenfolge der Faktoren p und q die Reihenfolge des Eintretens der zu p und q gehörigen Ereignisse gekennzeichnet werden soll. Von diesen Summanden sind die zu ppq und qqp gehörigen Ereignisse für R günstig. Für S bleibt die Wahrscheinlichkeit $w(S) = 2p^2q + 2pq^2 = 2pq \cdot (p+q) = 2pq$ wie im Fall I.

An dieses Ergebnis schließt DE MOIVRE in der *Doctrine* von 1738 die Bemerkung an[407], daß bei einer geraden (ungeraden) Markenzahl das Gesamtspiel nur in einer geraden (ungeraden) Anzahl von Spielen entschieden werden kann.

Nach der Berechnung von $w(S)$ bei vier und fünf Spielen und je zwei Marken der Spieler findet DE MOIVRE *Generalius:*

> *Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, et $2+d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant, erit*
>
> $$\frac{(2ab)^{1+\frac{1}{2}d}}{(a+b)^{2+d}} \quad \textit{expectatio ipsius } S;$$ [286]
>
> *Ubi nota d numerum esse parem; quod si d sit numerus impar, expectatio ipsius S eadem erit ac si numerus ille unitate esset diminutus.*

Bezeichnet man mit $w(S; n, n+d)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das Gesamtspiel nach $n+d$ Spielen noch nicht entschieden ist, wobei die Spieler anfangs je n Marken besitzen, so besagt dieses Ergebnis für gerade d:

$$w(S; 2, 2+d) = (2pq)^{1+\frac{d}{2}},$$

für ungerade d: $$w(S; 2, 2+d) = (2pq)^{\frac{1+d}{2}}.$$

Analog findet DE MOIVRE $w(S; 3, 3+d) = (3pq)^{1+\left[\frac{d}{2}\right]}$

(im folgenden sei d o.E.d.A. gerade).

Für Markenzahlen $n > 3$ kann DE MOIVRE zunächst nur eine *Regula generalis* zur Berechnung von $w(S; n, n+d)$ geben:

> *Sit n numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, $n+d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant. Elevetur $a+b$ ad potestatem n, et resecentur termini duo extremi, multiplicetur residuum per $aa+2ab+bb$, et rejiciantur termini extremi; fiat rursus multiplicatio residui per $aa+2ab+bb$, et rejiciantur extremi, et sic deinceps fiant tot multiplicationes quot sunt unitates in $\frac{1}{2}d$; et productum ultimum erit numerator expectationis ipsius S; denominator vero semper erit $(a+b)^{n+d}$.*

Nimmt man die Glieder der Entwicklung $(p+q)^{n+d} = (p+q)^n \cdot (p+q)^d$, so sind die zu den Gliedern von $p^n \cdot (p+q)^d$ und $q^n \cdot (p+q)^d$ gehörigen Ereignisse, nämlich A bzw. B gewinnt bei den ersten n Spielen n-mal, für R günstig, während die übrigen Glieder gerade $w(S; n, n)$ ergeben.

[407] S. 163.

Ist $d \geqq 2$, so zählen von den $w(S; n, n)$ konstituierenden Restgliedern

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu} = \left(\sum \cdots\right) \cdot (p+q)^2 \cdot (p+q)^{d-2}$$

die zu

$$\binom{n}{1} p^{n+1} q (p+q)^{d-2} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} p q^{n+1} (p+q)^{d-2}$$

gehörigen Ereignisse, A bzw. B gewinnt bei den ersten $(n+2)$ Spielen $(n+1)$-mal, für R, während die jetzt übrigen Glieder gerade $w(S; n, n+2)$ ergeben.

Führt man dieses Verfahren der Multiplikation mit $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ und Wegnahme der für $w(R)$ zählenden Randglieder $\frac{d}{2}$-mal durch, dann ist die Summe der letzten Restglieder gerade $w(S; n, n+d)$.

De Moivre, der in der *Mensura Sortis* nur bis zu dieser Regel gelangt war, gibt zu deren Illustration zwei Beispiele, von denen er beim zweiten in der *Doctrine* von 1718 nur mehr die Koeffizienten betrachtet und so eine formale Vereinfachung der Rechnung erzielt[408]:

Since n is $=5$, *and* $n+d=10$, *it follows that d is* $=5$. *Now d being an odd number must be lessened by Unity, and supposed* $=4$, *so that* $\frac{1}{2}d=2$. *Let therefore* $a+b$ *be raised to the fifth Power; and always rejecting the extreams, Multiply twice by* $aa+2ab+bb$, *or rather by* $1+2+1$; *thus*

$1)+5\ +10+10+5(+1$	$20\ +35+35+20$
$\quad 1+2+1$	$\quad 1\ +2\ +1$
$5)+10+10+5$	$20)+35+35+20$
$\quad +10+20+20+10$	$\quad +40+70+70+40$
$\quad +\ 5+10+10(+5)$	$\quad +20+35+35(+20$
$20+35+35+20$	$75+125+125+75$

Now to supply the literal Products that are wanting, let $n+\frac{1}{2}d-1$ *be made* $=p$, *and* $\frac{1}{2}d+1=q$, *than p will be* $=6$ *and* $q=3$. *Wherefore the Products to be annext viz.* $a^p b^q$, $a^{p-1}b^{q+1}$ *etc. will become* a^6b^3, a^5b^4, a^4b^5, a^3b^6; *and consequently the Expectation of S will be found to be*

$$\frac{75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6}{(a+b)^9}.$$

In der *Mensura Sortis* hatte de Moivre an jene die *Regula generalis* illustrierenden Beispiele die folgenden Aufgaben angeschlossen[409]:

Sit 4 *numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum quae faciat ut R possit aequa sorte affirmare certamen finitum iri intra ludos* 4, *S negare.*

Sit 4 *numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum talis, ut possit R affirmare finitum iri certamen intra* 4 *ludos, S negare, atque sint sortes ipsorum R et S in ratione data, videlicet ut* 3 *ad* 1.

Sit 4 *numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum quae faciat ut R possit aequa sorte affirmare certamen finitum iri intra ludos* 6, *S negare.*

Jede dieser Aufgaben führt zur Lösung einer reziproken Gleichung; denn in jeder ist

$$w(S; n, n+d) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu \cdot a^{n+\frac{1}{2}d-\nu} b^{\frac{1}{2}d+\nu}}{(a+b)^{n+d}}$$

[408] *Doctrine*, 1718, S. 106f.
[409] *Mensura Sortis*, S. 258f.

mit $\alpha_\nu = \alpha_{n-\nu}$ gleich einer Konstanten c. Setzt man wie DE MOIVRE $\frac{a}{b} = z$, so erhält man:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu \cdot z^{n+\frac{1}{2}d-\nu} = c \cdot (z+1)^{n+d} = c \cdot \sum_{\mu=0}^{n+d} \binom{n+d}{\mu} z^\mu$$

und damit

$$0 = c \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{d}{2}} \binom{n+d}{\nu} z^\nu + \sum_{\nu=\frac{d}{2}+1}^{n+\frac{d}{2}-1} \left[c \cdot \binom{n+d}{\nu} - \alpha_{n+\frac{1}{2}d-\nu} \right] z^\nu + c \cdot \sum_{\nu=n+\frac{d}{2}}^{n+d} \binom{n+d}{\nu} z^\nu.$$

Über diese Art Gleichungen, die später von EULER reziprok genannt wurden[410], schreibt DE MOIVRE in der *Mensura Sortis*[284]:

> *Omnes hujus generis aequationes, in quibus ratio dexteritatum determinanda venit ex datis numero nummorum et numero ludorum, ad dimensiones dimidio saltem pauciores, quam sit numerus ludorum datus semper reducentur; etenim coefficientes terminorum hinc inde ab extremis aequaliter distantium semper iidem erunt, adeoque si fingatur aequationes istas formari ex* $yy + yz + 1 = 0$, *et aequatione altera cujus coefficientes hinc inde ab extremis aequaliter distantes sint iidem, comparationes terminorum homologorum non erunt plures quam est dimidius ludorum numerus, adeoque dimensiones quantitatis y dimidio saltem pauciores erunt quam dimensiones quantitatis z.*

Hier ist also der Grundgedanke der Reduktion einer reziproken Gleichung vom Grad $2m$ auf eine Gleichung vom Grad m bereits ausgesprochen.

In der *Doctrine* von 1718 hatte DE MOIVRE die Berechnung von $w(R; n, n+d)$, der Wahrscheinlichkeit, daß das Gesamtspiel nach $n+d$ Spielen beendet ist, weitergeführt[411]. DE MOIVRE stellt dort einleitend fest: $w(R; n, n+d)$ setzt sich zusammen aus den in der vorhergehenden *Regula generalis* zur Berechnung von $w(S; n, n+d)$ abgestrichenen Randgliedern. So ist in dem vorgeführten Beispiel

$$w(R; 5, 10) = (p^5 + q^5) \cdot (1 + 5pq + 20p^2q^2).$$

Entsprechend ist

$$w(R; 6, 14) = (p^6 + q^6) \cdot (1 + 6pq + 27p^2q^2 + 110p^3q^3 + 429p^4q^4)$$

und

$$w(R; 7, 15) = (p^7 + q^7) \cdot (1 + 7pq + 35p^2q^2 + 154p^3q^3 + 637p^4q^4).$$

Hier ist der mutmaßliche Ausgangspunkt für die von DE MOIVRE entwickelte Theorie der r.R.n[412]:

> *All the Terms of these Series have to one another certain Relations; which being once discovered, each Term of any Series resulting from any Case of this Problem, may be easily generated from the preceding ones.*
>
> *Thus in the first of the two last foregoing Series, the Numerical Coefficient belonging to the Numerator of each Term, may be derived from the preceding ones, in the following manner. Let K, L, M be the Three last Coefficients, and let N be the Coefficient of the next Term wanted; then it will be found that N in that Series will constantly be equal to* $6M - 9L + 2K$.

---

[410] Siehe 4.4.3.

[411] S. 107—111.

[412] Siehe 5.2. und *Doctrine*, 1718, S. 108.

Hier ein heuristischer Weg zur Bestimmung der sc. rel., der als evident voraussetzt, daß der erste Koeffizient immer 1, der zweite n ist: Man vermutet in erster Näherung ein geometrisches Wachstum der Koeffizienten und erhält für den dritten n^2; der dritte Koeffizient ist für $n=6$ gleich 27 und damit um 9 kleiner als 36. Nimmt man deshalb in zweiter Näherung eine r. F. mit der sc. rel. $6-9$ an, dann ergibt sich für den vierten Koeffizienten $6\cdot 27-9\cdot 6=108$ ein um 2 zu kleiner Wert. Verbessert man die sc. rel. auf $6-9+2$, so lassen sich damit die folgenden Koeffizienten richtig berechnen.

Nach einem weiteren Beispiel gibt DE MOIVRE in einer ersten Regel die sc. rel. der Koeffizienten $\beta_{n,\nu}$ von

$$w(R;\, n,\, n+d)=(p^n+q^n)\left[1+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{d}{2}\right]}\beta_{n,\nu}(pq)^\nu\right]$$

für beliebiges n[413]:

But if the general Law, by which each Coefficient is generated from the preceding ones, be demanded, it will be exprest as follows. Let n be the number of Pieces of each Gamester: Then each Coefficient contains

n *times the last,*

$-n\cdot\frac{n-3}{2}$ *times the last but one,*

$+n\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}$ *times the last but two,*

$-n\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\cdot\frac{n-7}{4}$ *times the last but three,*

$+n\cdot\frac{n-6}{2}\cdot\frac{n-7}{3}\cdot\frac{n-8}{4}\cdot\frac{n-9}{5}$ *times the last but four,*

etc.

Darüber hinaus kann DE MOIVRE in einer zweiten Regel jeden beliebigen Koeffizienten $\beta_{n,d/2}$ direkt angeben[414]:

The Coefficient of any Term of these Series may be found, independently from any relation they may have to the preceding ones: In order to which it is to be observed that each Term of these Series is proportional to the Probability of the Plays Ending in a certain number of Games precisely ... Wherefore if that Term were desired which expresses the Probability of the Plays Ending in Twenty Games precisely, or in any number of Games denoted by $n+d$, I say that the Coefficient of that Term will be,

$\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n+d-1}{2}\cdot\frac{n+d-2}{3}\cdot\frac{n+d-3}{4}$ *etc. continued to so many Terms as there are Units in* $\frac{1}{2}d+1$.

$-\frac{1}{1}\cdot\frac{3n}{1}\cdot\frac{n+d-1}{2}\cdot\frac{n+d-2}{3}\cdot\frac{n+d-3}{4}$ *etc. continued to so many Terms as there are Units in* $\frac{1}{2}d+1-n$.

$+\frac{1}{1}\cdot\frac{5n}{1}\cdot\frac{n+d-1}{2}\cdot\frac{n+d-2}{3}\cdot\frac{n+d-3}{4}$ *etc. continued to so many Terms as there are Units in* $\frac{1}{2}d+1-2n$.

---

[413] *Doctrine*, 1718, S. 109.
[414] *Doctrine*, 1718, S. 109f.

$-\frac{1}{1}\cdot\frac{7n}{1}\cdot\frac{n+d-1}{2}\cdot\frac{n+d-2}{3}\cdot\frac{n+d-3}{4}$ *etc. continued to so many Terms as there are Units in* $\frac{1}{2}d+1-3n$.
etc.

In der *Doctrine* von 1738 gibt DE MOIVRE zu dieser Regel die folgende Ergänzung[415]:

> *But some things are to be observed about this formation of the Coefficients, which are.*
>
> *First, that whenever it happens that* $\frac{1}{2}d$, *or* $\frac{1}{2}d-n$, *or* $\frac{1}{2}d-2n$, *or* $\frac{1}{2}d-3n$, *etc. expressing respectively the number of Multiplicators to be taken in each Line, are* $=0$, *then* 1 *ought to be taken to supply that Line. Secondly, That whenever it happens that those quantities* $\frac{1}{2}d$, *or* $\frac{1}{2}d-n$, *or* $\frac{1}{2}d-2n$, *or* $\frac{1}{2}d-3n$, *etc. are less than nothing, otherwise that they are negative, then the Line to which they belong, as well as all the following, ought to be cancelled.*

Im Anschluß daran erklärt DE MOIVRE, daß mit diesen beiden Regeln und der Methode zur Summierung von r.R.n gilt [416]:

> *the Probability of the Plays Ending in any given Number of Games, will be found much more readily than can be done by either of the two first Methods taken singly.*

Aus dieser Stelle und anderen[417] geht hervor, daß DE MOIVRE sich zuerst mit der Summierung von r.R.n beschäftigt hat. Die Summierung von endlich vielen Gliedern einer r.R. setzt die Kenntnis der sc.rel. und der r sich an das letzte zu summierende Glied der r.R. anschließenden Glieder voraus, wobei r die Anzahl der Koeffizienten der sc.rel. ist[417]. Es ist aus dem vorhergehenden ziemlich sicher, daß DE MOIVRE die letzte Regel zur Bestimmung der $\beta_{n,\nu}$ nicht aus der vorher angegebenen sc.rel. mit Hilfe der *Regula generalis* der r.R.n, sondern direkt durch Induktion gefunden hat.

Nimmt man DE MOIVRES für $n=5$ vorgeführtes Koeffizientenschema für allgemeines, genügend großes n, so erhält man die ersten Koeffizienten von $w(R; n, n+d)$:

$$
\begin{array}{lllll}
1) & +n & +\binom{n}{2} & +\binom{n}{3} & +\binom{n}{4} & +\cdots \\
\hline
 & & 1+2+1 & & & \\
\hline
 & +n) & +\binom{n}{2} & +\binom{n}{3} & +\binom{n}{4} & +\cdots \\
 & & +2n & +2\binom{n}{2} & +2\binom{n}{3} & +\cdots \\
 & & & +n & +\binom{n}{2} & +\cdots \\
\hline
 & \frac{n\cdot(n+3)}{2} & +\binom{n+2}{3} & +\binom{n+2}{4} & +\cdots & \\
\hline
 & & 1+2+1 & & &
\end{array}
$$

[415] S. 170f.
[416] *Doctrine*, 1718, S. 110f.
[417] Siehe 5.2.

$$\frac{n\cdot(n+3)}{2}\Big)+\binom{n+2}{3}+\binom{n+2}{4}+\binom{n+2}{5}+\cdots$$

$$+n\cdot(n+3)+2\binom{n+2}{3}+2\binom{n+2}{4}+\cdots$$

$$+\frac{n\cdot(n+3)}{2}+\binom{n+2}{3}+\cdots$$

$$\frac{n\cdot(n+4)(n+5)}{3!}+\binom{n+4}{4}-1+\binom{n+4}{5}+\cdots$$

$$1+2+1$$

$$\frac{n\cdot(n+4)(n+5)}{3!}\Big)\ldots$$ [418]

Diese ersten Koeffizienten bieten eine Induktionsvoraussetzung für die erste Zeile von DE MOIVRES zweiter Regel. Beachtet man, daß sich bei kleinen n sehr bald eine Störung der Mittelglieder bemerkbar macht, und untersucht man diese Störung für kleine n, so läßt sich leicht die Grundlage für eine unvollständige Induktion finden, die DE MOIVRE mutmaßlich zur Formulierung der weiteren Zeilen seiner Regel benutzt hat. Die an Hand seiner Publikationen erkennbare Entwicklung des Spieldauerproblems unterstützt diese Vermutung, wonach DE MOIVRE sehr viele solche Koeffizientenschemata durchgerechnet hat. Die Entdeckung der ersten Regel, der sc.rel. der Koeffizientenfolge $\beta_{n,\nu}$ für beliebiges (festes) n, ist wahrscheinlich auf demselben induktiven Weg gefunden worden.

DE MOIVRE hatte das hier behandelte Spieldauerproblem schon in der *Mensura Sortis* verallgemeinert auf ungleiche Anzahlen von Marken, welche die Spieler A und B zu Beginn des Spieles besitzen. Auch in diesem Fall konnte DE MOIVRE durch analoges Vorgehen die sc.rel. der Koeffizientenfolge und jeden beliebigen Koeffizienten der Glieder, aus denen sich $w(R)$ zusammensetzt, angeben. Die Lösung dieses verallgemeinerten Problems bringt methodisch ebensowenig Neues wie die weiteren von DE MOIVRE behandelten Aufgaben im Rahmen des Spieldauerproblems.

Methodisch interessant ist die trigonometrische Darstellung von $w(S;\ n,\ x)$, auf die DE MOIVRE so stolz war, daß er die geometrische Veranschaulichung dieser Lösung, die Fortuna zusammen mit dem Glücksrad in der Hand hält, in der allen Editionen der *Doctrine* gemeinsamen Vignette auf der ersten Seite darstellen ließ. MATY meinte sogar in seiner *Mémoire*[419], sollte jemals ein hochherziger Schüler ein Grabmal für DE MOIVRE nahe dem von NEWTON errichten lassen, dann sollte als Symbol für DE MOIVRES Leistungen als Mathematiker eben jener geteilte Halbkreis der Vignette eingemeißelt werden,

> ... *comme le cilindre circonscrit au cercle le fut sur le tombeau d'Archimède, et la spirale logarithmique sur celui de l'ainé des Bernoullis.*

---

[418] Dabei wurde benutzt:

$\binom{n}{m}+2\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m-2}=\binom{n+2}{m}$, was sich durch zweimalige Anwendung von $\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}=\binom{n+1}{m}$ sofort ergibt.

[419] *Mémoire*, S. 25.

DE MOIVRE gab in den *MA* eine im Vergleich zu den in der *Doctrine* von 1718 und in den *PT* für 1722[403] veröffentlichten ausführliche Darstellung dieser trigonometrischen Lösung. CRAMER, der von DE MOIVRE 1728 über den Inhalt der damals noch nicht publizierten *MA* unterrichtet worden war, berichtet in seinem Brief an NIKOLAUS I BERNOULLI vom 4. 2. 1728 (n. S.) voll Spott von einem (noch immer) von seiner eigenen Leistung berauschten DE MOIVRE:

> *Une de ses decouvertes dont il s'applaudit le plus est celle qu'il a indiquée dans son Livre, Prob. penult.*[420] *et qu'il a publiée de nouveau dans les transactions*[403]*. Comme il m'en a parlé lui même d'une manière qui marquoit toutte sa tendresse pour cette chere solution, et tout le cas qu'il en faisoit, je vous prierai d'y jetter un coup d'oeil si vous aves du loisir pour cela.*

NIKOLAUS antwortete auf eine wiederholte Anfrage CRAMERs nach einer Erklärung zu dieser Lösung DE MOIVREs, er überlasse ihm gerne das Vergnügen, diese Erklärung selbst zu finden[421].

DE MOIVRE hat für diese Lösung den Hauptsatz seiner Theorie der r. R.n zusammen mit einem Ergebnis der Arbeiten über Winkelteilungsgleichungen verwendet.

DE MOIVRE hatte gezeigt:

$$w(R; n, n+d) = (p^n + q^n) \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{d}{2}} \beta_{n,\nu} (pq)^\nu,$$

wobei die $\beta_{n,\nu}$ eine r. F. bilden, deren sc.rel. in der ersten Regel angegeben worden war.

Setzt man

$$w(S; n, n+d) = \sum_{\mu=1}^{n-1} \alpha_{n, \frac{d}{2}, \mu} \cdot p^{n+\frac{d}{2}-\mu} q^{\frac{d}{2}+\mu},$$

dann bilden die $\alpha_{n,\nu,\mu}$ bei konstantem μ und n für alle $\mu = 1, \ldots, n-1$ ebenfalls eine r. F. mit derselben sc.rel. wie die $\beta_{n,\nu}$, was sich über die Beziehungen zwischen den $\beta_{n,\nu}$ und den $\alpha_{n,\nu,\mu}$ nachweisen läßt.

Setzt man deshalb die sc.rel. der Folge der $\beta_{n,\nu}$ bei festem n gleich $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_s$, dann bilden die $w(S; n, n+2\nu)$ bei konstantem n ebenfalls eine r. F. mit der sc.rel. $\gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \cdots + \gamma_s r^s$, wobei $r = pq$.

DE MOIVRE hatte in der ersten Regel

$$\gamma_\sigma = n \cdot \frac{(-1)^{\sigma+1}}{\sigma!} \prod_{\mu=\sigma+1}^{2\sigma-1} (n-\mu)$$

für $\sigma = 2, \ldots, s$ und $\gamma_1 = n$ angegeben.

Daß die $w(S; n, n+2\nu)$ eine r. F. mit der angegebenen sc.rel. bilden, hatte DE MOIVRE in den *MA* vorausgesetzt; in der *Doctrine* von 1738 motivierte er diese Voraussetzung durch ein Beispiel[422].

---

[420] Gemeint ist das Problem XLV in der *Doctrine* von 1718, das vorletzte der zum Spieldauerkomplex gehörenden Probleme.

[421] Brief NIKOLAUS I BERNOULLI an CRAMER vom 23. 3. 1729 (n. S.).

[422] S. 202f.

Sei jetzt der einfachste Fall, $p = q = \frac{1}{2}$ oder $r = \frac{1}{4}$ und n gerade, vorausgesetzt[423]:

Exponantur Probabilitates Certaminis non finiendi intra ludos 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 *etc. per quantitates* $P, Q, R, S, T, V, X, Y, Z$ *etc. Patet fore* $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$, $S = 1$, $T = 1$; *etenim certum est ludendi finem non eventuram ante pauciores ludos quam decem.*

Allgemein gilt $w(S; n, 2v) = 1$ für $v = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

Nun gibt DE MOIVRE die sc.rel. für die von ihm der Reihe nach mit P, Q, R usw. bezeichneten $w(S; n, 2v)$, $v = 0, 1, 2, \ldots$:

Jam terminus quisque ... ad ... antecedentes refertur per constantem relationis scalam ... cujus relationis Scala, lex generalis haec est; nimirum posito n numero nummorum quos uterque Collusorum habet, posita etiam $r = \frac{1}{4}$, *qualiscunque futurus sit numerus n; erit terminus quisque relatus ad tot antecedentes quot sunt Unitates in* $\frac{1}{2}n$, *si fuerit n numerus par, vel* $\frac{n-1}{2}$ *si fuerit impar, ad hunc modum*

$$V = nrT - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}rrS + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}\cdot r^3 R - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\cdot\frac{n-7}{4}r^4 Q \text{ etc.}$$

Wendet man jetzt zur Bestimmung von $w(S; n, n+d)$ den Hauptsatz der DE MOIVREschen Theorie der r. R.n an, dann müssen zunächst die Wurzeln der sich aus der sc.rel. ergebenden charakteristischen Gleichung vom Grade $s = \frac{n}{2}$

$$x^s - n\cdot\frac{1}{4}x^{s-1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot x^{s-2} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 x^{s-3} + \cdots \cdots (-1)^s\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{(s-1)!}{s!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^s = 0$$

bestimmt werden[417]. Vergleicht man diese Gleichung mit der von DE MOIVRE in den *PT* für 1738[424] veröffentlichten Beziehung zwischen $\cos n\alpha$ und $\cos\alpha$:

$$(2\cos\alpha)^n - \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}(2\cos\alpha)^{n-6} \pm \cdots = 2\cos n\alpha,$$

und setzt man in der mit 2^n multiplizierten charakteristischen Gleichung $x = z^2$, so erhält man

$$z = \cos\alpha \quad \text{mit} \quad n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

oder

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\cdot(1+2k)\right).$$

Da

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

ist

$$x = z^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\cdot(1+2k)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi(1+2k)}{n}\right),$$

[423] *MA*, S. 76.

[424] Siehe 4.4.2. Aus diesem Abschnitt geht auch hervor, daß DE MOIVRE selbst diese Beziehung, deren Äquivalent sich z.B. auch in einer Publikation JAKOB BERNOULLIS von 1702 findet[277], lange vor ihrer Veröffentlichung ableiten konnte.

wobei alle möglichen verschiedenen Werte von x schon mit $k=0, \ldots, s-1$ erreicht werden. Diese s verschiedenen Wurzeln x_ϱ, $\varrho=1, \ldots, s$ sind die Quotienten der geometrischen Folgen, aus denen sich die r. F. der $w(S; n, 2\nu)$ zusammensetzt. Die Anfangsglieder dieser geometrischen Folgen genügen dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\sum_{\varrho=1}^{s} A_\varrho &= w(S; n, 0) &&= 1\\
\sum_{\varrho=1}^{s} A_\varrho x_\varrho &= w(S; n, 2) &&= 1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum_{\varrho=1}^{s} A_\varrho x_\varrho^{s-1} &= w(S; n, 2s-2) &&= 1.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$A_\varrho = \frac{\prod_{\sigma \neq \varrho}(1-x_\sigma)}{\prod_{\sigma \neq \varrho}(x_\varrho - x_\sigma)}$$

und hat so

$$w(S; n, n+d) = \sum_{\varrho=1}^{\frac{n}{2}} A_\varrho \cdot x_\varrho^{\frac{n+d}{2}}$$

bestimmt.

DE MOIVRE gibt das Ergebnis dieser Rechnung für $n=10$ an[425]:

Quapropter si Radices m, p, q, s, t dentur, dabitur et Probabilitas Certaminis non finiendi intra datum quemlibet ludorum numerum x, quae utique erit $A\,m^{\frac{1}{2}x} + B\,p^{\frac{1}{2}x} + C\,q^{\frac{1}{2}x} + D\,s^{\frac{1}{2}x} + E\,t^{\frac{1}{2}x}$.

Sed divisa in partes aequales decem semicircumferentia circuli cujus diameter AZ sit Unitas; si a primo, tertio, quinto, septimo, nono, divisionis termino demittantur ad diametrum perpendicula HB, KC, MD, OE, QF erunt sinus versi[426] *ZB, ZC, ZD, ZE, ZF aequales Radicibus m, p, q, s, t, quod constat ex Aequationibus ad circulum vulgo notis, proinde Radices illae dabuntur.*

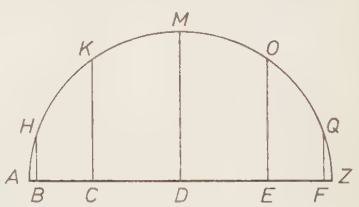

Fig. 5

Im Folgenden gibt DE MOIVRE noch die Vereinfachungen:

$$\prod_{\sigma \neq \varrho}(1-x_\sigma) = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(1-x_\varrho)} = \frac{1}{2^{n-2}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)}$$

$$\prod_{\sigma \neq \varrho}(x_\varrho - x_\sigma) = \frac{(-1)^{\varrho+1}\cdot n}{2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi(2\varrho-1)}{n}}$$ [427]

[425] *MA*, S. 77f.

[426] Sinus versus $= 1 - \cos$.

[427] Das konstante Glied der charakteristischen Gleichung $(-1)^s \frac{n}{s}\left(\frac{1}{4}\right)^s = \frac{(-1)^s}{2^{n-1}}$ ist dem Produkt der mit $(-1)^s$ multiplizierten Wurzeln $x_\varrho = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}(2\varrho-1)\right)$ $(\varrho=1, \ldots, s)$ gleich; somit gilt:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \prod_{\varrho=1}^{s}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}(2\varrho-1)\right) = \prod_{\varrho=1}^{s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}(2\varrho-1)\right) = \prod_{\varrho=1}^{s}(1-x_\varrho)$$

und damit

$$A_\varrho = \frac{(-1)^{\varrho+1} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}}{n \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)} .$$

Daraus erhält man schließlich

$$w(S; n, 2\nu) = \sum_{\varrho=1}^{s} \frac{(-1)^{\varrho+1} \cdot \sin \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}}{n \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{\nu-1} \cdot n} \sum_{\varrho=1}^{s} (-1)^{\varrho+1} \frac{\sin \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}}{\left(1 - \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)} \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2^{\nu-1} \cdot n} \sum_{\varrho=1}^{s} (-1)^{\varrho+1} \frac{\left(\sin \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)^{2\nu+1}}{\left(1 - \cos \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}\right)^{\nu+1}} .$$

De Moivre bringt diese Ergebnisse in den *MA*, wobei die trigonometrischen Funktionen durch die entsprechenden Strecken in der zuletzt gegebenen Figur ausgedrückt sind.

Die trigonometrische Lösung für ungerade n bei Gleichheit der Gewinnchancen von A und B und schließlich für ungleiche Gewinnchancen und beliebiges natürliches n wird analog gefunden.

De Moivres trigonometrische Lösung erinnert an seine den Gedanken erzeugender Funktionen andeutende Bemerkung im Vorwort zur *Doctrine* über die Verwendung von Reihen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung[389]; allerdings hat hier sein Vorgehen, nämlich die Berechnung von $w(S; n, 2\nu)$ unter der Voraus-

---

oder

$$\prod_{\sigma \neq \varrho} (1 - x_\sigma) = \frac{1}{2^{n-1} \cdot (1 - x_\varrho)} = \frac{1}{2^{n-2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} (2\varrho - 1)\right)} .$$

Differenziert man die Gleichung

$$2^{n-1} \prod_{\sigma=1}^{s} (x - x_\sigma) = \cos n\varphi, \qquad x = \cos^2 \varphi, \qquad x_\sigma = \left(\cos \frac{\pi \cdot (2\sigma - 1)}{2n}\right)^2$$

nach x an der Stelle x_ϱ, d.h.

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} \cdot (2\varrho - 1),$$

und beachtet, daß

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\sin 2\varphi,$$

so erhält man

$$\prod_{\sigma \neq \varrho} (x_\varrho - x_\sigma) = \frac{(-1)^{\varrho+1} \cdot n}{2^{n-1} \sin \frac{\pi(2\varrho-1)}{n}} .$$

Daß de Moivre die Fluxion der charakteristischen Gleichung gebildet hat, d.h. sie differenziert hat, sieht man in den *MA*, S. 41. Er erhält dabei allerdings einen Ausdruck, aus dem das von ihm angegebene mit der hier abgeleiteten Formel für $\prod_{\sigma \neq \varrho} (x_\varrho - x_\sigma)$ identische Ergebnis nicht ohne weitere Umformung zu ersehen ist.

setzung, daß die $w(S; n, 2v)$ eine r.F. bilden, deren charakteristische Gleichung mit der Darstellung von $\cos nx$ als Funktion von $\cos^2 x$ verglichen werden kann, nur sehr bedingt mit der erst später entwickelten Theorie der erzeugenden Funktionen zu tun[428].

6.2. Der de Moivresche Grenzwertsatz für binomiale Verteilungen

Schon CARDANO hatte in seinem *De Ludo Aleae* verschiedentlich das Gesetz der großen Zahlen in der noch unbestimmten Form impliziert[429]: Ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit p wird i.a. bei n ($n \gg 1$) Versuchen in einer von pn nicht sehr verschiedenen Anzahl eintreffen.

JAKOB BERNOULLI war der erste, der dieses Gesetz mathematisch befriedigend formulieren und beweisen konnte. Aus den *Meditationes* JAKOBs, einer im wesentlichen chronologischen Sammlung von vorbereitenden Notizen und Abhandlungen, deren Charakter zwischen einer ersten Niederschrift und einem überarbeiteten Entwurf für eine spätere Publikation schwankt[430], geht hervor, daß JAKOB BERNOULLI spätestens 1689 den allgemeinen Beweis des sogenannten BERNOULLIschen Theorems gefunden hatte[431]. Im Sinne einer Datierung ist auch JAKOBs Ankündigung des Theorems in der *AC*[432] zu verstehen: *istud problema ... quod jam per vicennium pressi*, die von DE MOIVRE richtig übersetzt wurde[433]: *This is the Problem ... after having kept it by me for twenty years ...* im Gegensatz zur Interpretation von KARL PEARSON, der sich darüber wundert, daß JAKOB BERNOULLI in zwanzig Jahren nicht mehr als eine sehr grobe Approximation zustande brachte[434].

JAKOBs eigentliches Anliegen war, die Sicherheit, mit der aus den relativen Häufigkeiten des Eintretens eines Ereignisses auf die unbekannte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses geschlossen werden kann, abzuschätzen. Dieses Anliegen formuliert JAKOB in einer mutmaßlich aus dem Jahr 1688 stammenden Randbemerkung in den *Meditationes* nach dem Hinweis auf ein *Billet de mortalité:*

> *minus enim in proportione*[435] *aberrare possum si saepius quam si rarius observem. Demonstro hoc.*

Der Hauptsatz, der allerdings die Umkehrung der von BERNOULLI formulierten Problemstellung enthält[436], lautet in den *Meditationes:*

---

[428] Vergleiche dazu F.N. DAVID a.a.O., S. 173 und H. FREUDENTHAL (2) a.a.O., S. 163f.

[429] Siehe: CARDANO (2) a.a.O., S. 265, 267 und 276; für den Inhalt von S. 276 vgl. auch OYSTEIN ORE a.a.O., S. 170f.

[430] Die *Meditationes* werden im Rahmen der BERNOULLI-Edition zum ersten Mal publiziert.

[431] Die Datierung des Hauptsatzes als zwischen 1687 und 1689 entstanden und bewiesen verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn VAN DER WAERDEN.

[432] *AC*, S. 227.

[433] *Doctrine*, 1756, S. 254.

[434] KARL PEARSON (2) a.a.O., S. 206f.

[435] Es ist das die Wahrscheinlichkeit charakterisierende Verhältnis der günstigen zu den ungünstigen Fällen gemeint.

[436] CORRADO GINI a.a.O., S. 401—413 wies auf die Problematik hin, die sich aus der als Umkehrung des Hauptsatzes von JAKOB anzusehenden Anwendung ergibt.

Possibile est, tot observationes instituere ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcumque arctos cadant quam extra illos.

Diesen Satz und seinen Beweis lernte DE MOIVRE, formal leicht verändert, in der *AC*, die er 1714 erhalten hatte, kennen. Von JAKOB BERNOULLI übernahm DE MOIVRE das mathematische Problem, den Ausdruck

$$\frac{1}{(a+b)^n} \cdot \sum_{|\nu - ar| \leqq c} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}, \qquad n = r(a+b), \qquad 0 < c \leqq \min(ar, br),$$

und damit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{a}{a+b}$ bei n Versuchen zwischen $ar (= np) - c$ und $ar + c$ mal eintritt, zu approximieren.

In den *MA* geht DE MOIVRE auf die Vorarbeiten JAKOB und NIKOLAUS I BERNOULLIS ein[437], der in seiner Dissertation von 1709 *De Usu Artis Conjectandi in Jure* den Beweisgedanken von JAKOBS Hauptsatz übernommen hat, und schildert dann die Entwicklung seiner eigenen Arbeiten.

DE MOIVRE beschäftigte sich seit 1721 mit diesem Problem. Den Anstoß dazu gab ALEXANDER CUMING mit der folgenden Aufgabe[438]:

Collusores duo A et B quorum dexteritates sint in ratione data a ad b, spectatori cuidam ita se obstringant, ut post conclusum quemlibet ludorum numerum n quem a + b metitur, A sit ei tot nummos largiturus quot ipse plures ludos vicerit quam qui designentur per $\frac{a}{a+b} n$*: similiter B sit ei largiturus tot nummos quot ipse plures ludos vicerit quam qui designentur per* $\frac{b}{a+b} n$*, quaeritur sors spectatoris.*

Dabei ist n als ganzzahliges Vielfaches von $a + b$ vorausgesetzt. Als Lösung gibt DE MOIVRE, der den Beweis nur für $a = b$ führt, an:

Designet E terminus ille Binomii a + b ad potestatem n evecti in quo indices quantitatum a et b eam rationem inter se habeant quae est a ad b, sit p index quantitatis a, q index quantitatis b; quibus positis, sors spectatoris ab utroque Collusorum oriunda, recte designabitur per $\frac{2pq}{n \cdot (a+b)^n} \cdot E$*, vel ab eorum utrolibet per* $\frac{pq}{n \cdot (a+b)^n} \cdot E$ [286, 439].

In einem Korollar stellt DE MOIVRE fest, daß der Erwartungswert des Zuschauers eine monoton steigende Funktion von n ist, obwohl *eo propius ludi quibus A vincit B, et ludi quibus B vincit A, ad rationem a ad b accedunt.* Das Ver-

---

[437] *MA* Buch 5, *De Binomio a + b ad Potestatem permagnam evecto*, S. 96—110. Die Arbeiten der beiden BERNOULLIS sind auf S. 96—99 referiert.

[438] *MA*, S. 101.

[439] Der gesuchte Erwartungswert ist, setzt man

$$\frac{a}{a+b} = p, \qquad \frac{b}{a+b} = q \quad \text{und} \quad \frac{n}{a+b} = r,$$

gleich:

$$\sum_{\nu = ar+1}^{n} (\nu - ar) \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} + \sum_{\mu = br+1}^{n} (\mu - br) \binom{n}{\mu} p^{n-\mu} q^\mu = 2npq \binom{n}{ar} p^{ar} q^{br}.$$

hältnis des Erwartungswertes zu n, das DE MOIVRE numerisch für $a=b$ und $n=100\nu$, $\nu=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ in der *Doctrine* von 1738 angibt[440], ist proportional dem Verhältnis des größten Gliedes der Entwicklung von $(a+b)^n$ zu $(a+b)^n$, der Summe aller Glieder[441]. Dieses letzte Verhältnis hatte DE MOIVRE im Anschluß an die es voraussetzende Lösung der Aufgabe von CUMING untersucht und für große n abgeschätzt[442]. Diese Abschätzung bot in der durch STIRLING vorbereiteten verbesserten Form[442] die Grundlage für eine Approximation der Summen von Binomialkoeffizienten, deren Ergebnis der DE MOIVREsche Grenzwertsatz war. Diese Grundlage stand DE MOIVRE allerdings erst 1729/30 zur Verfügung.

Schon vorher hatte DE MOIVRE zwei Versuche gemacht.

Das Kapitel *De Puncto Inflexus in Binomio* leitet DE MOIVRE so ein[443]:

> *si termini omnes Binomii intelligantur normaliter erigi super lineam rectam ad intervalla aequalia, ducaturque Curva per extremitates omnium terminorum seu ordinatarum; Curva sic descripta habebit duplex punctum inflexus, unum ab utraque parte termini maximi.*

DE MOIVRE legt durch die Punkte $\left(c+\nu, \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}\right)$ ($\nu=0, \ldots, n$; c beliebige Konstante) der reellen Ebene eine Parabel und bestimmt dann die zwei Wendepunkte, die *Puncta Inflexus*, dieser Parabel, indem er den Index- d.h. den Abszissenabstand der Wendepunkte vom Maximum berechnet. DE MOIVRE entwickelt hier also den Gedanken einer graphischen Darstellung der Binomialverteilung und approximiert die entstehende Treppenkurve durch eine stetige Funktion, deren Verhalten er diskutiert.

In einem ersten Korollar stellt DE MOIVRE fest, daß der zu $\frac{|a-b|+r}{2(a+b)}$, $r=(a^2+6ab+b^2+4nab)^{\frac{1}{2}}$ berechnete Indexabstand zwischen Wendepunkt und Maximum für $a=b$ den Wert $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n+2}$ hat und für große n mit $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n}$ angegeben werden kann.

In einem zweiten Korollar gibt DE MOIVRE die folgende Approximationsformel für Binomialkoeffizientensummen ohne Beweis:

> *Haec autem conjectura de summa terminorum juvari poterit Theoremate hic apposito, quod subsidio Methodi Differentiarum contexui; sit igitur A terminus quilibet Binomii, B terminus alter a superiore distans intervallo p, C terminus tertius a secundo distans eodem intervallo p; quibus positis, termini omnes unitate inter se distantes, atque inter A et C interpositi una cum extremis A et C conficient fere summam* $\frac{2p+1}{6p}\left((p+1)(A+C)+(4p-2)B\right)$ [286]. *Hoc vero ita restringi debet, ut intervallum inter A et C ne sumatur nimis magnum.*

Setzt man in dieser Formel für A und C die Wendepunkte, für B das Maximum der die Binomialverteilung charakterisierenden Parabel und $p=\frac{1}{2}\sqrt{n}$, so erhält

---

[440] S. 233.

[441] Einen von JAKOB BERNOULLIS Beweis in der AC etwas abweichenden dafür, daß für $n=(a+b)r$, $\binom{n}{ar} a^{ar} b^{br}$ das größte Glied in der Entwicklung von $(a+b)^n$ ist, hat DE MOIVRE in den *MA*, S. 107f. gegeben. Hier ist auch allgemein das größte Glied der Entwicklung von $(a+b)^n$ bestimmt.

[442] Siehe 5.3.

[443] *MA*, S. 109f.

man unter Berücksichtigung der DE MOIVRESchen Abschätzungen für A und B im Fall $n=900$ [444] für das Verhältnis der durch die Ordinaten der Wendepunkte begrenzten Parabelfläche zur Fläche der Parabel zwischen den Ordinaten von Anfangs- und Endpunkt den Approximationswert 0,708, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 bei $n=900$ Versuchen in dem Bereich $435=n-\frac{1}{2}\sqrt{n}, n+\frac{1}{2}\sqrt{n}=465$ streut, ist ungefähr 0,7.

Diese von DE MOIVRE selbst nicht angestellte Rechnung zeigt, daß DE MOIVRE mit den ihm 1721 zu Gebote stehenden Mitteln die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung der Größenordnung $\sqrt{n}$ abschätzen konnte.

Eine weitere Approximation der Summe der mittleren Binomialkoeffizienten stammt aus dem Jahr 1722[445]. DE MOIVRE war es damals gelungen, die Berechnung dieser Summe mit seiner Lösung der Spieldaueraufgabe zu verknüpfen. DE MOIVRE geht aus von den beiden Ereignissen:

1. Vor oder bei Abschluß von n Spielen hat einer der beiden Spieler A, B vom anderen p Marken gewonnen, wobei die Gewinnchancen von A und B gleich sind.

2. Einer der beiden Spieler hat zunächst p Marken verloren und dann bis zum Abschluß der n Spiele nicht nur den Verlust wettgemacht, sondern gegenüber seiner Markenzahl zu Beginn mindestens p Marken gewonnen.

DE MOIVRE bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des zum ersten Ereignis komplementären mit d, die Wahrscheinlichkeit des zum zweiten komplementären mit f. Die gesuchte Summe

$$2^{-n}\cdot\sum\binom{n}{\nu},\ \frac{n}{2}-\frac{p-1}{2}\leqq\nu\leqq\frac{n}{2}+\frac{p-1}{2}\quad(n\text{ gerade},\quad p\text{ ungerade})$$

ist dann die komplementäre Wahrscheinlichkeit zu dem Ereignis, daß einer der beiden Spieler nach n Spielen mindestens p Marken vom anderen gewonnen hat. Ohne Beweis setzt DE MOIVRE obige Summe gleich $\frac{1}{2}(d+f)$ [446].

DE MOIVRE approximiert $\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}f$ durch $\frac{1}{2}w(S;p,n)+\frac{1}{2}$ und erhält für $n=900$, $p=45$ auf Grund seiner trigonometrischen Lösung von $w(S)$ [447] für $2^{-900}\cdot\sum_{\nu=428}^{472}\binom{900}{\nu}$ den Näherungswert 0,8662, der *consentit ad tres figuras cum vera ratione.*

1733 ließ DE MOIVRE für einige Freunde ein siebenseitiges Separatum drucken, die *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem expansi;* dieses Separatum enthält den erst nach 1730 entstandenen DE MOIVRESchen Grenzwertsatz. Von diesem Sonderdruck sind bis heute nur drei Exemplare als noch vorhanden nachweisbar; alle drei sind Ausgaben der *MA* beigebunden[177]. Die *Approximatio* wurde in einer unwesentlich erweiterten Form englisch in der *Doctrine* von 1738 zum ersten Mal publiziert[448].

---

[444] *MA*, S. 102—106.
[445] *MA*, S. 226—229.
[446] Für eine moderne Behandlung des Problems siehe H. FREUDENTHAL (2) a.a.O., S. 164—166.
[447] Siehe 6.1.
[448] S. 235—243.

Die darin enthaltene Lösung des *hardest Problem, that can be proposed on the Subject of Chance*, kündigt DE MOIVRE in der *Doctrine* an:

> *I shall here translate a Paper of mine which was printed November 12, 1733, and communicated to some Friends, but never yet made public, reserving to myself the right of enlarging my own Thoughts, as occasion shall require.*[449]

Diese Übersetzung wurde unverändert in die *Doctrine* von 1756 übernommen[450] und um eine abschließende Bemerkung erweitert[451].

Für das folgende ist die Grundlage ausschließlich die *Approximatio* von 1733, deren mathematischer Inhalt sich mit dem der späteren englischen Übersetzung deckt.

Ausgehend von der 1721 entwickelten Approximationsformel $\frac{2A}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ für das Verhältnis des mittleren Gliedes T_m der Entwicklung $(1+1)^n$ zur Summe aller[442], zu 2^n, kommt DE MOIVRE über den Ausdruck $\frac{2B}{\sqrt{n}}$ $(B=A\cdot e^{-1})$ schließlich zu der Näherungsformel $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$.

Die Berechtigung, $B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ zu setzen, leitet DE MOIVRE aus dem Vergleich mit dem von JAMES STIRLING gefundenen Ergebnis ab [442], der sich nach DE MOIVRE mit demselben Problem befaßt hatte. Es gilt damit für große n

$$\frac{T_m}{2^n}=2^{-n}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\cdot n}}.$$

Der ebenfalls 1721 gefundene Ausdruck für den *Logarithmus rationis, quam in Potestate maxima, Medius Terminus habet ad Terminum intervallo l a Medio distantem, posita $n=2m$,*

$$\left(m+l-\frac{1}{2}\right)\log(m+l-1)+\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\log(m-l+1)-2m\log m+\log\frac{m+l}{m},$$

wird für sehr große n vereinfacht zu $-2\frac{l^2}{n}$. DE MOIVRE gibt keine Ableitung dieses letzten Ergebnisses[452]:

$$\ln\frac{T_{m\pm l}}{T_m}=\ln\binom{n}{m\pm l}-\ln\binom{n}{m}\approx-2\frac{l^2}{n},\qquad n=2m\gg l\geqq 1.$$

$T_{m\pm l}$ ist dabei der Binomialkoeffizient mit dem Indexabstand l vom mittleren T_m.

[449] Diese Bemerkung DE MOIVRES führt die Mutmaßungen und Behauptungen KARL PEARSONS ((2) a.a.O.) bezüglich des Charakters der *Approximatio* als eines zweiten Supplementums zu den *MA* ad absurdum. KARL PEARSON hat anscheinend die zweite Auflage der *Doctrine* ebensowenig gesehen wie F.N. DAVID, die a.a.O., S. 174 die Übersetzung der *Approximatio* erst in der dritten Auflage der *Doctrine* feststellen kann.

[450] S. 243—251.

[451] *Remark* II, S. 251—254.

[452] Mit Hilfe der Reihenentwicklung von $\ln(1\pm x)$ läßt sich zeigen: $\ln\frac{T_{m\pm l}}{T_m}=$ $=-2\frac{l^2}{n}+o\left(\frac{l^2}{m}\right)$, so daß für sehr große n und im Vergleich zu n kleine l, für den Logarithmus des Verhältnisses der angegebene asymptotische Wert gesetzt werden kann.

Das folgende Corollarium II der *Approximatio* bringt die Summierung der Binomialkoeffizienten: Aus dem letzten Ergebnis

$$\ln \frac{T_{m+l}}{T_m} \approx -\frac{2l^2}{n}$$

oder

$$\frac{T_{m+l}}{T_m} \approx \left(e^{-2\frac{l^2}{n}} = \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-2\frac{l^2}{n}\right)^\nu}{\nu!} = 1 - 2\frac{l^2}{n} + \frac{4}{2}\cdot\frac{l^4}{n^2} - \frac{8}{6}\cdot\frac{l^6}{n^3} \pm \cdots$$

sequitur rationem quam in potestate infinita summa Terminorum inclusorum intra Medium et Terminum illum cujus distantia a Medio est l, fore

$$\frac{2}{\sqrt{nc}}\ in\ l - \frac{2\cdot l^3}{3n} + \frac{4\cdot l^5}{2\cdot 5nn} - \frac{8\cdot l^7}{6\cdot 7n^3} + \frac{16\cdot l^9}{24\cdot 9n^4} - \frac{32\cdot l^{11}}{120\cdot 11n^5}\ etc.^{286}.$$

Dabei ist c der Umfang des Einheitskreises.

Ersichtlich hat DE MOIVRE

$$\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{\nu=0}^{l} T_{m+\nu} = \frac{T_m}{2^n}\cdot\sum_{\nu=0}^{l}\frac{T_{m+\nu}}{T_m},$$

das nach den vorhergehenden Überlegungen asymptotisch gleich

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\sum_{\nu=0}^{l} e^{-2\frac{\nu^2}{n}}$$

ist, ersetzt durch

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\int_0^l e^{-2\frac{x^2}{n}}\,dx.$$

Über die erst durch die Summenformel von EULER und MACLAURIN nachweisbare Berechtigung zu diesem Übergang von der Summe der Funktionswerte bei äquidistant fortschreitendem Argument zum bestimmten Integral der Funktion[453] äußerte sich DE MOIVRE nicht, ja er verwendet nicht einmal den dem Integral entsprechenden Fachterminus *Fluente*. Den Gedanken einer Approximation einer Treppenkurve (deren Stufenhöhe und -breite mit wachsendem n immer kleiner wird) durch eine stetige Funktion hatte DE MOIVRE allerdings schon bei der Bestimmung der *Puncta Inflexus*, der Wendepunkte, geäußert.

DE MOIVRE setzt in dem in die oben angegebene Reihe entwickelten Integral $l = s\sqrt{n}$ und erhält speziell für $s = \frac{1}{2}$ eine Reihe, *quae adeo celeriter ad verum convergit ut juvantibus octo vel novem terminis, summa desiderata ad sex aut septem loca decimalium perduci possit.* Für das Integral im Fall $l = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ und somit als asymptotischen Wert für $\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{0\le\nu\le\frac{1}{2}\sqrt{n}} T_{m+\nu}$ erhält DE MOIVRE 0,341344.

In einem Lemma verknüpft DE MOIVRE diese Approximation einer Binomialkoeffizientensumme mit dem Wahrscheinlichkeitsproblem:

---

[453] EULER hat seine Summenformel in der *Methodus generalis summandi progressiones* a.a.O. veröffentlicht. COLIN MACLAURINS entsprechende, unabhängig von EULER gefundene Formel findet sich in dem 1742 veröffentlichten *Treatise of Fluxions.*

Si Eventus aliquis ita a sorte pendeat ut Probabilitates Contingentiae et Non-contingentiae sint inter se aequales, atque instituantur Experimenta numero n quibus observetur utrum eventus se ostensurus sit an occultaturus; Probabilitas fore ut nec saepius se ostendat quam vicibus $\frac{1}{2}n+l$, nec rarius quam vicibus $\frac{1}{2}n-l$ sic invenietur. Sint termini L et L hinc inde a Medio Termino Binomii $(1+1)^n$ intervallo l aequaliter distantes, sit etiam s summa Terminorum inclusorum intra L et L, una cum extremis; tunc Probabilitas quaesita recte exprimetur per $\frac{s}{2^n}$, quod cum sit facillimum, Demonstratione non indiget.

Bezeichnet man die von DE MOIVRE gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die relative Häufigkeit h_n zwischen den Werten $\frac{1}{2}n-l$ und $\frac{1}{2}n+l$ bewegt, mit $w\left(\left|h_n-\frac{1}{2}n\right|\leqq l\right)$, so bedeutet die im folgenden Korollar III formulierte Aussage:

Ergo si possent capi experimenta n numero infinita, Probabilitas fore ut Eventus nec saepius se ostenderet quam vicibus $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\sqrt{n}$, nec rarius quam $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\sqrt{n}$ exprimeretur ... per 0,682688,

$$\lim_{n\to\infty} w\left(\left|h_n-\frac{1}{2}n\right|\leqq\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{2x^2}{n}}\,dx\approx 0{,}682688.$$

Im Korollar IV wird das letzte Ergebnis als Approximationswert für große endliche n verwendet. Für $n=3600$ erhält DE MOIVRE so:

$$w(1770\leqq h_{3600}\leqq 1830) \text{ ist ungefähr } 0{,}682688.$$

Der Einwand, DE MOIVRE habe durch zweifache Summation des mittleren Gliedes und durch den Übergang von der Summe zum Integral einen Fehler in seiner Rechnung[454], ist nicht stichhaltig. Aus dem Korollar III wird klar, daß DE MOIVRE nur den Grenzübergang n gegen Unendlich in Betracht zog, den er in Ermangelung einer geeigneten Terminologie und Symbolik in zwei Schritten vollzog. Bei diesem Grenzübergang spielt das mittlere Glied keine Rolle mehr und wird die Summe zum Integral. Den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit verwendet DE MOIVRE als Approximationswert für große n. Zu untersuchen bleibt also nur, inwieweit der Grenzwert als Approximationswert brauchbar ist. Im Korollar V bestätigt deshalb DE MOIVRE, daß in dem ihm durch seine in den *MA*[442] und verbessert im *SMA*[369] veröffentlichte Logarithmentafel für $n!$ zugänglichen Bereich von $n=100$ bis $n=900$ *res satis commode definietur*[455].

In Korollar VI berechnet DE MOIVRE die Wahrscheinlichkeit für $l=\sqrt{n}$. Für diesen Wert konvergiert die in Korollar II entwickelte Reihe langsamer; DE MOIVRE bedient sich deshalb des Mittels *Quadraturarum Mechanicarum*. Analog

---

[454] Siehe J. EGGENBERGER a.a.O., S. 157 und E. CZUBER a.a.O., S. 74.

[455] Zum Vergleich wurde das von DE MOIVRE in Korollar IV gewählte Beispiel $n=3600$ auf der Rechenanlage der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgerechnet:

$$2^{-3600}\cdot\sum_{i=1770}^{1830}\binom{3600}{i}=0{,}690688344391628$$

$$2^{-3600}\cdot\binom{3600}{1800}=0{,}013297152567956$$

$$2^{-3600}\binom{3600}{1770}=0{,}008066064164924.$$

dem Verfahren, eine Funktion durch eine Parabel n-ten Grades, die in mindestens $(n+1)$ Punkten mit der Funktion übereinstimmt, zu approximieren, wird hier das bestimmte Integral angenähert:

sint igitur quatuor ordinatae A, B, C, D ad aequalia intervalla positae, sit praeterea l distantia inter primam ordinatam et ultimam; quibus datis, Area sic prodibit $\frac{A+D+3\cdot(B+C)}{8}\cdot l$ [286], *cujus Demonstrationem passim apud Mathematicos reperire licet* [456].

Ausgehend von

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{\nu=0}^{\sqrt{n}} T_{m+\nu} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{2x^2}{n}}\, dx$$

und dem bereits bekannten Wert des Integrals zwischen 0 und $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ approximiert DE MOIVRE den Wert des Integrals zwischen $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ und $\sqrt{n}$, indem er die Funktionswerte von $e^{-\frac{2x^2}{n}}$ an den Stellen $\frac{3}{6}\sqrt{n}, \frac{4}{6}\sqrt{n}, \frac{5}{6}\sqrt{n}, \sqrt{n}$ also A, B, C, D berechnet und in die angegebene Quadraturformel einsetzt. Für das mit $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$ multiplizierte Restintegral erhält DE MOIVRE schließlich 0,13580.

Die sich als Summe des Grenzwertes für $l=\frac{1}{2}\sqrt{n}$, 0,682688, und des mit $\frac{4}{\sqrt{2\pi n}}$ multiplizierten Restintegrals ergebende Zahl 0,95428

exhibebit Probabilitatem fore ut post facta experimenta n, Eventus nec saepius se ostendat quam vicibus $\frac{1}{2}n+\sqrt{n}$, *nec rarius quam* $\frac{1}{2}n-\sqrt{n}$.

Abschließend deutet DE MOIVRE den Grenzwertsatz für eine beliebige Ausgangswahrscheinlichkeit an:

Ratio quam in potestate infinita, n maximus Terminus habet ad summam $(a+b)^n$ *recte definietur fractione* $\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$.

Setzt man $p=\frac{a}{a+b}$ und $q=\frac{b}{a+b}$, so erhält man für das angegebene Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}$.

Für den Logarithmus des Verhältnisses des Gliedes mit dem Indexabstand l zum Größten gibt DE MOIVRE den Wert $-\frac{l^2}{2pqn}$.

Geht man der Empfehlung DE MOIVRES im zehnten Korollar folgend analog zum Fall $p=\frac{1}{2}$ vor, so erhält man in moderner Schreibweise:

$$w\left(|h_n-pn|\leqq l\right)\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}\cdot \int_{-l}^{+l} e^{-\frac{x^2}{2pqn}}\, dx \quad \text{oder für } l=c\sqrt{pqn}$$

$$\lim_{n\to\infty} w\left(|h_n-pn|\leqq c\sqrt{pqn}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}\cdot \int_{-c\sqrt{pqn}}^{c\sqrt{pqn}} e^{-\frac{x^2}{2pqn}}\, dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int_{-c}^{+c} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.$$

Damit ist die *Approximatio* abgeschlossen, in der DE MOIVRE den deshalb so zu nennenden DE MOIVRESchen Grenzwertsatz bewiesen hat [457].

[456] Diese Formel hatte DE MOIVRE JOHANN I BERNOULLI im Brief vom 6. 7. 1708 (a. S.) mitgeteilt. Siehe WOLLENSCHLÄGER a. a. O., S. 249.

[457] Den Fall ungleicher Indexabstände vom maximalen Glied betrachtet DE MOIVRE nicht, obgleich er die Mittel zu seiner Lösung zur Verfügung hatte.

War es JAKOB BERNOULLIS Leistung, ein Gefühl für oder ein intuitives Glauben an ein Gesetz der großen Zahlen, das CARDANO in seinem *de Ludo Aleae* zum Ausdruck bringt, zu einem einer mathematischen Behandlung zugänglichen Satz präzisiert und diesen Satz durch Abschätzungen bewiesen zu haben, so hat DE MOIVRE mit neuen Methoden über eine grobe Abschätzung hinaus durch seine Bestimmung des Grenzwertes eine Approximation für große n gefunden, aus der die Streuung der relativen Häufigkeit um den Erwartungswert als von der Größenordnung $\sqrt{n}$ ersehen werden kann.

6.3. De Moivre und seine Vorgänger über Leibrenten

In seinem Buch *Annuities on Lives*, das zum ersten Mal 1725 erschienen war und weitere vier Auflagen bis 1756 erlebte, hat DE MOIVRE, ähnlich wie er in der *Doctrine* die Wahrscheinlichkeitsrechnung seiner Zeit repräsentierte, eine Theorie zur Berechnung aller damals üblichen Rentenformen entwickelt.

In einer solchen Theorie müssen die Kapitalverzinsung und die Sterblichkeit berücksichtigt werden.

Das Problem der Kapitalverzinsung konnte DE MOIVRE, als er um 1721 anfing die Grundlagen für seine *Annuities* zu schaffen als gelöst betrachten. Er selbst hatte HALLEY brieflich einen Beweis für dessen 1705 veröffentlichtes Theorem[59] *for finding the rate of Interest in Annuities* mitgeteilt[272]. Mit dem Annuitätenproblem hatten sich vorher schon u.a. NEWTON, GREGORY, LEIBNIZ und JAKOB BERNOULLI beschäftigt.

Auch die Berücksichtigung der Sterblichkeit bei der Rentenberechnung war nicht mehr neu. JAN DE WITT hatte 1671 in einer Studie über Leibrenten[171] die Sterblichkeit durch eine Sterbewahrscheinlichkeit charakterisiert, die er in jedem der vier von ihm festgelegten Abschnitte des mit 80 Jahren abschließenden Bereichs der Lebensalter als konstant ansah. Die Hypothese DE WITTS stützte sich noch nicht auf Beobachtungsmaterial in Form von Geburts- und Sterberegistern, doch war mit der Einführung einer Erlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeit durch DE WITT der Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung über den Glücksspielkomplex hinaus erweitert worden. Diese Erweiterung hatte insbesondere die Neugier JAKOB BERNOULLIS gereizt, der das Buch DE WITTS allerdings trotz wiederholter Anforderungen von LEIBNIZ[170] nicht erhalten konnte.

Schon vor dieser Studie von JAN DE WITT waren in England 1662 *Natural and Political Observations Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality* ... von JOHN GRAUNT (1620—1674) erschienen, dessen zumindest alleinige Autorschaft zugunsten von WILLIAM PETTY (1623—1687) verschiedentlich bestritten wurde[458]. Die *Observations* GRAUNTS waren noch weit davon entfernt, eine auch nur annähernd befriedigende Absterbeordnung zu bieten. In seiner mehr medizinhistorisch interessanten Statistik brachte GRAUNT nur eine sehr dürftige Tabelle, in der er ausgehend von 100 neugeborenen Kindern die Lebenden nach 6, 16 und um je zehn Jahre fortschreitend bis nach 76 Jahren angab und nach 80 Jahren mit dem Absterben des letzten abschloß.

[458] Siehe D.V. GLASS a.a.O. Dort ist die Diskussion um die Autorschaft von den Zeitgenossen GRAUNTS und PETTYS bis heute S. 78—89 ausführlich referiert; GLASS selbst neigt in seinem Urteil zu einer weitgehenden Unabhängigkeit GRAUNTS.

Robert Moray hatte Christiaan Huygens Graunts Schrift schon bald nach ihrem Erscheinen zugesandt[459]. Huygens beschäftigte sich trotz der von ihm sofort erkannten Bedeutung von Graunts Arbeit[460] erst 1669 mit der erwähnten Tabelle, nachdem ihm sein Bruder Lodewijk die sich an eine lineare Interpolation der Werte Graunts anschließenden Folgerungen mitgeteilt hatte[461].

Christiaan verbesserte den Ansatz seines Bruders, indem er eine stetige, monoton fallende Kurve durch die aus Graunts Tabelle entnommenen Punkte mit dem Alter x als Abszisse und den Lebenden l_x als Ordinate zeichnete[462]. Mit diesem Graph einer Absterbeordnung als Grundlage bestimmte Christiaan die mittlere Lebensdauer und löste damit zusammenhängende Aufgaben mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Arbeiten Huygens blieben unveröffentlicht und deshalb ebenso unbekannt wie eine ähnliche Studie von Leibniz, die Dezember 1675 entstanden war. In dieser von dem Herzog von Roannez angeregten Arbeit hatte Leibniz das Problem einer Absterbeordnung behandelt. Leibniz ging bei seinen Überlegungen nicht von den ihm bekannten Zahlen Graunts aus, Er übernahm lediglich das durch Graunts Tabelle gegebene Interpolationsproblem, die Zahl der Lebenden $l_{x+\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots 9$ zu bestimmen, wenn l_x und l_{x+10} gegeben sind. Leibniz diskutierte zunächst die Möglichkeit eines linearen Abfalls der Lebenden, also einer konstanten und deshalb vom Alter $x+\nu$ unabhängigen Anzahl der in diesem Alter Verstorbenen $d_{x+\nu}$. Er verwarf diesen Ansatz zugunsten eines konstanten Verhältnisses $\frac{l_{x+\nu+1}}{l_{x+\nu}}$ der in einem Abstand von einem Jahr Lebenden. Leibniz' Grund für die Ablehnung der ersten Möglichkeit war die logische Unverträglichkeit mit der zweiten, die er intuitiv für richtig hielt.

Es ist mir nicht bekannt, ob Leibniz, der beide Möglichkeiten auch graphisch darstellte, das Verhältnis $\frac{l_{x+\nu+1}}{l_{x+\nu}}$ als Maß für eine Wahrscheinlichkeit ansah[463].

Auf die Vorarbeiten Halleys, der seine im Auftrag der Royal Society mit den Geburts- und Sterbelisten für die Jahre 1687 bis 1691 der als stationär angesehenen Bevölkerung Breslaus erstellte Sterbetafel zusammen mit einigen Anwendungen der aus dieser Tafel zu entnehmenden Erlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeit auf die Rentenrechnung in den *PT* von 1693 veröffentlicht hatte[168], bezog sich de Moivre. Von Halley übernahm de Moivre bei der Berechnung des Barwertes einer Rente das Prinzip, den Barwert der Rentenraten für die einzelnen Jahre zu bestimmen und über die Jahre zu summieren. Halley mußte dazu allerdings die einjährige Erlebenswahrscheinlichkeit für jedes Alter eigens aus

---

[459] Siehe Brief Moray an Huygens vom 6. 3. 1662 (a. S.), in Huygens, *Oeuvres complètes* IV, S. 94f.

[460] Siehe Brief Huygens an Moray vom 9. 6. 1662 (n. S.), in Huygens, *Oeuvres complètes* IV, S. 149.

[461] Siehe Brief Lodewijk Huygens an Christiaan Huygens vom 30. 10. 1669 (n. S.) in Huygens, *Oeuvres complètes* VI, S. 515—518.

[462] Siehe Brief Christiaan an Lodewijk vom 21. 11. 1669 (n. S.) in Huygens, *Oeuvres complètes* VI, S. 531.

[463] Zu der in der Leibnizhandschrift Nr. 1197 des *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz* II, Poitiers 1914—24, enthaltenen Diskussion siehe K.-R. Biermann (1) a. a. O.

seiner Tabelle bestimmen. Halley hatte auch schon die Erlebenswahrscheinlichkeit für zwei und drei verbundene Leben berechnet.

Die Leistung de Moivres, der die relevanten unpublizierten Arbeiten von Huygens und Leibniz nicht kannte, besteht darin, eine mathematisch faßbare Absterbeordnung aus Halleys Tafel abgeleitet zu haben. Wann de Moivre zu seiner Absterbeordnung gekommen war, ist schwer zu beurteilen, da er zwar schon im Brief vom 3. 3. 1714 (a. S.) an Nikolaus I Bernoulli von seiner Lösung des *Problème de la mortalité du genre humain* berichtet hatte, aber im Vorwort zur zweiten Auflage der *Annuities* 1743[464] schrieb[465]:

> *The Subject of Annuities on Lives, had been long neglected by me, partly prevented by other Studies, partly wanting the necessary means to treat of it as it deserved: But two or three Years after the Publication of the first Edition of my Doctrine of Chances, I took the Subject into consideration; and consulting Dr. Halley's Table of Observations, I found that the Decrements of Life, for considerable Intervals of Time, were in Arithmetic Progression.*

Diese Beobachtung, daß die Anzahl der im Alter x Verstorbenen d_x verschiedentlich für ein größeres Altersintervall konstant bleibt, brachte de Moivre zu dem Versuch *of supposing those Decrements uniform from the Age of Twelve*, also d_x für alle x von 12 an aufwärts gleichzusetzen. Den Beginn dieses hypothetischen linearen Abfalls der Lebenden mit 12 begründete de Moivre[466]:

> *I need not take Notice, that from the Time of Birth to the Age of Twelve, the Probabilities of Life increase, rather than decrease, which is a Reason of the apparent Irregularity of the Tables in the beginning.*

Die Berechtigung zu seinem Ansatz sah de Moivre in den geringen Unterschieden zwischen den mit Halleys Tafel und den mit Hilfe dieses Ansatzes berechneten Rentenwerten; sozusagen durch den Vergleich zwischen mathematischen Modell und der als Wirklichkeit anzusehenden Halleyschen Tafel. De Moivre war sich über den hypothetischen Charakter seiner Absterbeordnung durchaus im klaren[467]:

> *I will not say that the Decrements of Life are precisely in that Proportion, still comparing that Hypothesis with the Table of Dr. Halley, from the Observations made at Breslaw, they will be found to be exceedingly approaching.*

De Moivre übertrug seine den aus Halleys Tafel ersichtlichen Abfall der Lebenden approximierende lineare Absterbeordnung später auch auf andere Tafeln[468].

Die mit dem linearen Abfall der Lebenden verbundene fallende arithmetische Folge der n-jährigen Erlebenswahrscheinlichkeiten führt bei der Berechnung des Barwertes einer Rente zur Summierung der Glieder einer r. F. Die Reihenfolge der in den Ausgaben der *Annuities* und der zweiten Auflage der *Doctrine*[469] behandelten Probleme und die Mitteilung im Brief vom 3. 3. 1714 (a. S.) an Nikolaus I Bernoulli, daß bei der Lösung des *Problems der menschlichen Sterblichkeit* die neue Methode der erst später von de Moivre so genannten rekurrenten Reihen

---

[464] Ein Exemplar der *Annuities* von 1725 konnte ich nicht erhalten.
[465] *Preface* S. VIII.
[466] *Annuities* 1743, S. IX.
[467] *Annuities* 1743, S. 2.
[468] *PT* Nr. 473, 1744, S. 65—78, speziell S. 72—74.
[469] *Doctrine* 1738 S. 211—225.

bzw. Folgen angewandt wurde, lassen eine Lösung des Barwertproblems unter Annahme eines linearen Abfalls der Lebenden schon um 1714 vermuten.

Im Gegensatz zu den einer Tafel entsprechenden *real Lives* führte DE MOIVRE später auch *fictitious Lives* ein, die durch eine konstante einjährige Erlebenswahrscheinlichkeit $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ ausgezeichnet sind. Die n-jährigen Erlebenswahrscheinlichkeiten $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ dieser *fictitious Lives* bilden eine geometrische Folge, genügen also der von LEIBNIZ angenommenen zweiten Möglichkeit einer Absterbeordnung. Die Rentenberechnung bei verbundenen Leben führte DE MOIVRE ausschließlich mit fiktiven Leben durch, deren Verwendung er in der *Doctrine* von 1738 ebenso wie früher die Annahme eines linearen Abfalls der Lebenden begründet hatte, nämlich durch den geringfügigen Unterschied zu den mit *real Lives* berechneten Werten. Erst in der Ausgabe von 1756 gab DE MOIVRE zu, daß dabei der Fehler in manchen Rechnungen *too considerable to be neglected* war[470]. Hier gab DE MOIVRE neben einer neuen Regel für verbundene Leben auch den Hauptgrund für die Einführung fiktiver Leben an:

> *To preserve somewhat of Elegance and Uniformity in my Solutions, as well as to avoid an inconvenient multiplicity of Canons and Symbols, I did transfer the Decrement of Life from an Arithmetical to a Geometrical Series.*

Die Überlebens-Wahrscheinlichkeiten in Gruppen hatte DE MOIVRE mit Hilfe der Infinitesimalrechnung ermittelt und so als erster die Methoden der Analysis zur Charakterisierung der Sterblichkeit eingeführt.

Mit diesen Methoden und der Hypothese einer linearen Absterbeordnung bzw. der Verwendung fiktiver Leben konnte DE MOIVRE zusammen mit den elementaren Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Renten- und Pachtprobleme Lösungsregeln angeben, die er selbst ansah als *very near Approximations, upon which business may be transacted without considerable Loss to any party concerned*[471].

7. Schluß

In den vorangehenden Abschnitten 4 bis 6 wurde die Bedeutung DE MOIVRES für die Entwicklung der Gleichungs- und Reihenlehre und vor allem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgestellt. Das biographische Kapitel 3 zeigt, daß sich DE MOIVRE mit fast allen damals aktuellen Fragen der Mathematik auseinandergesetzt hat.

Bei einer Beurteilung des Gesamtwerks DE MOIVRES muß berücksichtigt werden, daß für den Privatlehrer bereits als Erfolg anzusehen war, bei den anstehenden Problemen mitreden zu können, also bis zur eigentlichen Forschung vorzudringen. Was darüber hinausging, d.h. soweit DE MOIVRE selbst zur Entwicklung der Mathematik beigetragen hat, ist in den vorangehenden fachlichen Abschnitten eingehend behandelt worden. Dieser fachliche Teil bestätigt das Urteil des ebenfalls einer Hugenottenfamilie entstammenden CHARLES ETIENNE JORDAN, der DE MOIVRE 1733 kennengelernt hatte[472]: *J'ai vu plusieurs fois à Londres l'illustre Mr. de Moivre, un des grands Mathématiciens du Siècle.*

[470] *Doctrine* 1756, S. 326f.
[471] *Doctrine* 1756, S. 328.
[472] JORDAN a.a.O., S. 147.

Die Bemerkung Matys in der *Mémoire*, daß die nachgelassenen Papiere de Moivres von zuverlässigen Freunden übernommen wurden, reizt zu der Überlegung, ob der bis jetzt nicht wiedergefundene Nachlaß oder bis jetzt unbekannte Briefe Material enthalten könnten, das zu einer gegenüber der in dieser Arbeit gegebenen Beurteilung veränderten zwingt.

Maty hat den Nachlaß de Moivres noch gesehen; von den darin enthaltenen Korrespondenzen findet er neben einigen Einzelbriefen allein die mit Johann I Bernoulli und mit Varignon erwähnenswert. Ein Vergleich zwischen den *MA* und dem mathematischen Inhalt des Briefwechsels mit Johann I Bernoulli sowie den Veröffentlichungen de Moivres in den *PT* bis 1722 zeigt, daß de Moivre in den *MA* den gesamten Bereich seiner mathematischen Interessen mit Ausnahme der Rentenrechnung umfaßt und die wichtigsten Ergebnisse seiner Forschungen bis 1730 einschließlich von Ergänzungen zu der in der *Doctrine* von 1718 enthaltenen Wahrscheinlichkeitsrechnung wiedergegeben hat.

1730 war de Moivre 63 Jahre alt; er fand in diesem Alter zwar noch den Grenzwertsatz für Wahrscheinlichkeiten mit binomialer Verteilung, aber schon die Formulierung des Grenzwertsatzes und noch mehr der Umstand, daß die *Approximatio* mathematisch unverändert in die zweite und dritte Auflage der *Doctrine* übernommen wurde, verdeutlicht das Ende der wissenschaftlichen Aktivität de Moivres um diese Zeit. Was de Moivre nach 1733 noch leistete, war vor allem der Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der *Doctrine* zu einem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei mathematisch keine neuen Ideen oder Methoden gegenüber den bis 1733 bekannten auftreten.

All dies macht die eventuelle Entdeckung von sachlich Neuem in den bis jetzt verschollenen Manuskripten unwahrscheinlich; die vorliegende Arbeit darf deshalb als für den mathematikhistorisch interessanten de Moivre kennzeichnend angesehen werden.

Die Anregung, mich mit dem Mathematiker Abraham de Moivre zu beschäftigen, gab mir Herr J. O. Fleckenstein. Ihm vor allem sowie den beiden anderen Mitgliedern der Bernoullikommission, Herrn B. L. van der Waerden und Herrn H. Straub (Universitätsbibliothek Basel) sei hier für die liebenswürdige Unterstützung, speziell die Erlaubnis, zum größten Teil unpubliziertes Material der Bernoulliedition sichten zu dürfen, gedankt ebenso wie Herrn J. E. Hofmann für seine Hinweise auf Arbeiten von Leibniz und Fermat. Insbesondere gilt mein Dank der Betreuung durch meinen verehrten Lehrer, Herrn H. Gericke, der es mir ermöglichte, die Arbeit an dem von ihm geleiteten Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München zu erstellen.

Literatur

Abel, Niels Henrik

(1) *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, Christiania 1824.

(2) *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 1826.

Allamand, J. N. S., siehe s'Gravesande.

Anderson, Alexander, siehe Viète.

Apollonius v. Perge, siehe Halley.

Arbuthnot, John

Of the laws of chance, London 1692 (die Autorschaft von Arbuthnot wird von Todhunter a.a.O., S. 49 behauptet).

Auchter, Heinrich

Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph, Würzburg 1937.

Bag, Amulya Kumar

Trigonometrical series in the Karaṇapaddhati and the probable date of the text, Indian Journal of History of Science 1, 1966, S. 98—106.

Bateman, H.

The correspondence of Brook Taylor, BM (3) 7, 1906/07, S. 367—371.

Bernoulli, Daniel

(1) *Observationes de seriebus recurrentibus*, Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 3 (1728), 1732, S. 85—100.

(2) Briefwechsel mit Euler, teilweise veröffentlicht in *BM* (3) 7, 1907, S. 126—156.

Bernoulli, Jakob

(1) *Meditationes et annotationes*, chronologische Sammlung von mathematischen Papieren von 1677 bis 1705. Diese Manuskriptsammlung liegt in der Universitätsbibliothek Basel.

(2) *Demonstratio rationum, quas habent series numerorum naturali progressione sese insequentium. AE*, Juli 1686, S. 360f.

(3) *Section indéfinie des arcs circulaires*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1702), Ausgabe Amsterdam 1707, S. 374—385.

(4) *Ars conjectandi*, hrsg. v. den Gebrüdern Thurneisen und Nikolaus I Bernoulli, Basel 1713.

Bernoulli, Johann I

(1) *Multisectio anguli vel arcus, duplici aequatione universali exhibita ...* in *AE*, April 1701, S. 170—175.

(2) *Solution d'un problème concernant le calcul intégral*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1702), Ausgabe Amsterdam 1707, S. 385—397.

(3) *Angulorum arcuumque sectio indefinita per formulam universalem expressa sine serierum auxilio ... AE*, Juni/Juli 1712, S. 274—277 u. S. 329f.

(4) *Epistola pro eminente mathematico, Dn. Johanne Bernoullio, contra quendam ex Anglia antogonistam scripta. AE*, Juli 1716, S. 296—315.

(5) *M. Jo. Henr. Crusii Responsio ad Cl. Viri Johannis Keil ... Defensionem pro Nobilissimo Viro Is. Newtono ... AE*, Oktober 1718, S. 454—466.

(6) *Virorum Celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoulli commercium philosophicum et mathematicum*, 2 Bde., Lausanne-Genf 1745.

Bernoulli, Nikolaus I

(1) *De usu artis conjectandi in jure*, Basel 1709.

(2) *Solutio generalis problematis XV. propositi a D. de Moivre, in tractatu de Mensura Sortis ... pro numero quocunque Collusorum, PT* Nr. 341 (1714), 1717, S. 133—144.

Biermann, Kurt-Reinhard

(1) *Eine Untersuchung von G.W. Leibniz über die jährliche Sterblichkeitsrate*, Forschungen und Fortschritte 29, 1955, S. 205—208.

(2) *Die Methode der vollständigen Induktion bei und vor Jakob Bernoulli*, Archives internationales d'histoire des sciences A 9, 1956, S. 233—238.

(3) (zusammen mit Margot Faak) *G.W. Leibniz und die Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit bei J. de Witt*, Forschungen und Fortschritte 33, 1959, S. 168—173.

Bodenheimer, F.S.

An early study in population dynamics, Archives internationales d'histoire des sciences A 11, 1958, S. 27f.

Bombelli, Rafael

L'Algebra, Bologna 1572, Titelauflage 1579.

Braunmühl, A. v.

(1) *Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes, BM* (3) 2, 1901, S. 97—102.

(2) *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* II, Leipzig 1903.

BUÉE, A. Q.
Mémoire sur les quantités imaginaires, PT, 1806, S. 23—88.

CARDANO, Geronimo
(1) *Ars magna sive de regulis algebraicis*, Nürnberg 1545.
(2) *De Ludo Aleae*, veröffentlicht in den *Opera* (in 10 Bdn., hrsg. von C. SPON) I, Lyon 1663, S. 262—276.

CATALOGUE critique des Manuscrits De Leibniz II (März 1672—November 1676), Poitiers 1914—1924.

CHEYNE, George
(1) *Fluxionum methodus inversa; sive quantitatum fluentium leges generaliores*, London 1703.
(2) *Rudimentorum methodi fluxionum inversae specimina: quae responsionem continent ad animadversiones Ab. de Moivre in librum G. Chaeynei*, London 1705.

COMMERCIUM EPISTOLICUM D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota, London 1712 (1713).

COSTE, Pierre, siehe NEWTON.

COTES, Roger
(1) *Logometria, PT* Nr. 338 (1714), 1717, S. 5—45.
(2) *Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae*, hrsg. von ROBERT SMITH, Cambridge 1722.

CZUBER, Emanuel
Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen, Jahresbericht der *DMV* 7, 1899.

DAVID, F. N.
Games, Gods and Gambling, London 1962.

DESCARTES, René
Géometrie als Anhang zum *Discours de la méthode*, Leiden 1637; lateinisch hrsg. von FRANS VAN SCHOOTEN, Leiden 1649, Amsterdam 1659/61 und öfter. In der Ausgabe von 1659/61 verschiedene Kommentare und selbständige Arbeiten u. a. von JAN HUDDE.

DICTIONARY of National Biography, London seit 1885.

DODSON, James
The Mathematical Miscellany in 3 Bdn., 1748 (DE MOIVRE gewidmet), 1753 (mit einem Beitrag DE MOIVRES), 1755.

EDLESTON, Joseph
Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes, including letters of other eminent men, London 1850.

EGGENBERGER, J.
Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals, Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, 1893, S. 110—182.

EULER, Leonhard
(1) *Methodus generalis summandi progressiones*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1732/33), 1738, S. 68—97.
(2) *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*, Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 6 (1732/33), 1738, S. 216—231.
(3) *Considerato progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1739), 1750, S. 116—127.
(4) Briefwechsel mit DANIEL BERNOULLI, *BM* (3) 7, 1907, S. 126—156.
(5) *Opera omnia* in 4 Serien seit 1911.

FAAK, Margot, siehe BIERMANN Kurt-R.

FATIO DE DUILLIER, Nicolas
Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, London 1699.

FEDEL, Ernst Jakob
Der Briefwechsel Johann I Bernoulli — Pierre Varignon aus den Jahren 1692 bis 1702 in erläuternder Darstellung, Heidelberg 1933.

Fermat, Pierre de
Oeuvres in 4 Bdn., hrsg. von Paul Tannery und Charles Henry, Paris 1891—1912.

Fleckenstein, Joachim Otto
Die Taylorsche Formel bei Johann I Bernoulli, Elemente der Mathematik 1, 1946, S. 13—17.

Fontenelle, Bernhard le Bovier de
Eloge de M. de Montmort, Histoire de l'académie royale des sciences (1719), Paris 1721, S. 83—93.

Freudenthal, Hans
(1) *Zur Geschichte der vollständigen Induktion*, Archives internationales d'histoire des sciences A 6, 1953, S. 17—37.
(2) (zusammen mit Steiner, Hans-Georg)
Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik, Grundzüge der Mathematik IV, hrsg. v. H. Behnke, G. Bertram, R. Sauer, Göttingen 1966, S. 149—195.

Gerhardt, Carl Immanuel, siehe Leibniz.

Gini, Corrado
Gedanken zum Theorem von Bernoulli, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 82, 1946, S. 401—413.

Ginzel, F. K.
Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie III, Leipzig 1914.

Girard, Albert
Invention nouvelle en algèbre, Amsterdam 1629.

Glass, D. V.
John Graunt and his Natural and Political Observations, Notes and Records of the Royal Society 19, 1964, S. 63—100.

Grandjean de Fouchy, Jean Paul
Eloge de Mr. Moivre, Histoire de l'académie des sciences (1754), Paris 1756, S. 175—184; Amsterdam 1763, S. 258—272.

Graunt, John
Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality ..., London 1662 und öfter.

s'Gravesande, Wilhelm Jakob
Oeuvres philosophiques et mathématiques, hrsg. v. J. N. S. Allamand, Amsterdam 1774.

Gregory, James, siehe Turnbull.

Haag, Eugène et Emile
La France Protestante VII, Paris 1857.

Haas, Karlheinz
Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde (1628—1704) Bürgermeister von Amsterdam, Centaurus 4, 1956, S. 235—284.

Halley, Edmond
(1) *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*, *PT* Nr. 196, 1693, S. 569—610, ergänzt in *PT* Nr. 198, 1663, S. 654—656.
(2) *Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo ...* Oxford 1706.

Henrion, Denis
La Géometrie pratique de J. Errard, revue et augmentée, Paris 1619.

Hermann, Jakob
(1) *Demonstratio geminae formulae a Cel. Dn. Joh. Bernoulli ... pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibitae*, *AE*, August 1703, S. 345—352.
(2) *Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum*, Amsterdam 1716.
(3) *Lettre de M. Hermann ...* *JL* 9, 1718, S. 406—415.

Hofmann, Joseph Ehrenfried
(1) (aus dem Nachlaß von Heinrich Wieleitner) *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde*, München 1934 (Schulprogramm).
(2) *Nicolaus Mercators Logarithmotechnia (1668)*, Deutsche Mathematik 3, 1938, S. 446—466.
(3) *Weiterbildung der logarithmischen Reihe Mercators in England III. Halley, Moivre, Cotes*, Deutsche Mathematik 5, 1940, S. 358—375.
(4) *Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis.*
I. Materialien zur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665—1675), Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften Jg. 1943. Math. naturw. Klasse Nr. 2, Berlin 1943.
(5) *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672—1676)*, München 1949.
(6) *Um Eulers erste Reihenstudien*, erschienen in dem von Kurt Schröder redigierten *Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers*, Berlin 1959, S. 139 bis 208.
(7) *Pierre Fermat — ein Pionier der neuen Mathematik*, Praxis der Mathematik 7, 1965, S. 113—119, 171—180, 197—203.
(8) *Leibniz als Mathematiker*, in dem Sammelband: *Leibniz, Sein Leben — Sein Wirken — Seine Welt*, hrsg. von W. Totok und C. Haase, Hannover 1966, S. 421 bis 458.
(9) *Geschichte der Mathematik* in 3 Bdn., Berlin 1963, 1957, 1957.
(10) *Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Genf 1956.

Horsley, Samuel, siehe Newton.

Hudde, Jan
De reductione aequationum (Brief vom 15. 7. 1657 an Frans van Schooten), veröffentlicht in der *Geometria* von Descartes 1659/61.

Huygens, Christiaan
(1) *De Ratociniis in Aleae Ludo*, Leiden 1657, siehe Schooten.
(2) *Oeuvres complètes* in 22 Bdn., La Haye 1888—1950.

Jones, William
Synopsis palmariorum matheseos, London 1706.

Jordan, Charles Etienne
Histoire d'un voyage littéraire, fait en 1733 en France, en Angleterre, et en Hollande; La Haye 1735.

Keill, John
(1) *Réponse de M. Keill, M. D. Professeur d'Astronomie Savilien, aux Auteurs des Remarques ... JL* 4, 1714, S. 319—358.
(2) *Démonstration de deux théorèmes, qui peuvent servir à lever un grand nombre de difficultez dans la Phisique. JL* 5, 1714, S. 414—420.
(3) *Extrait d'une lettre de M. le Docteur Keill ... JL* 7, 1715, S. 113. Dieser Briefauszug geht voran dem *Extrait du livre intitulé Commercium Epistolicum Colinii et aliorum ... JL* 7, 1715, S. 114—158 und S. 344—365.
(4) *Defense du Chevalier Newton ... JL* 8, 1716, S. 418—433.
(5) *Lettre de Monsieur Jean Keill ... à Monsieur Jean Bernoulli ... écrite en Avril 1717, JL* 10, 1719, S. 261—287.
(6) *Epistola ad Joannem Bernoullium in qua Isaacum Newtonum et seipsum contra criminationes in Actis Lipsiensibus a Crusio quodam publicatas defendit*, London 1720.

Le Gendre, François
L'Arithmétique en sa perfection, Paris 1657.

Leibniz, Gottfried Wilhelm
(1) *De bisectione laterum*, Leibnizhandschrift von Juli 1675 im Leibnizarchiv Hannover (LH 35, III B, f. 1—2).
(2) *M. le Duc de Roannez m'a proposé ce problème.* Leibnizhandschrift (in lateinisch) von Dezember 1675, Nr. 1197 AB des *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz* II.

(3) *G.G. Leibnitii Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillerii imputationes ... AE*, Mai 1700, S. 198—208.
(4) *Remarques sur le différent entre M. de Leibnitz et M. Newton, JL* 2, 1713, S. 445 bis 453.
(5) *Virorum celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum* in 2 Bdn., Lausanne und Genf 1745.
(6) *Mathematische Schriften* in 7 Bdn., hrsg. von C.I. Gerhardt, Berlin und Halle 1849—1863.
(7) *Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern*, hrsg. von C.I. Gerhardt I (einziger), Berlin 1899.

Leonardo von Pisa gen. Fibonacci
Liber abbaci (1202 u. 1228), hrsg. von B. Boncompagni, Rom 1857.

Maclaurin, Colin
(1) *A treatise of fluxions*, Edinburg 1742.
(2) *An account of Sir Isaac Newton's philosophy*, London 1748 und öfter.

Mac Pike, Eugene Fairfield
Correspondence and papers of Edmond Halley, Oxford 1932 und London 1937.

Maddison, R.E.W.
A note on the correspondence of Martin Folkes, P.R.S., Notes and Records of the Royal Society of London 11, 1954, S. 100—109.

Maseres, Francis
Scriptores logarithmici or a collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms, 6 Bde., 1791—1807.

Maty, Matthieu oder Matthew
Mémoire sur la vie et sur les écrits de Mr. Abraham de Moivre, Journal Brittanique, September-Oktober 1755 und erneut als Separatdruck, La Haye 1760.

Maty, Paul Henry
General Index to the Philosophical Transactions from the first to the end of the seventieth volume, London 1787.

Mercator, Nikolaus
Logarithmotechnia, London 1668.

Moivre, Abraham de, siehe 2.2. und 2.3.2.

Montmort, Pierre Rémond de
Essay d'analyse sur les jeux de hazard, 1. Auflage Paris 1708, 2. Auflage Paris 1713/14.

Morgan, Augustus de
Dr. Johnson and Dr. Maty, Notes and Queries (2) 4, 1857, S. 341.

Müller, Kurt
Leibniz-Bibliographie, Frankfurt a. M. 1967.

Newton, Isaac
(1) *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London 1687.
(2) *Opticks: or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, London 1704 und öfter.
Eine von Samuel Clarke besorgte lateinische Übersetzung erschien 1706, eine von Pierre Coste besorgte französische Übersetzung erschien in Amsterdam 1720 und in Paris 1722.
(3) *Arithmetica Universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Ausgabe Leiden 1732.
(4) *Isaaci Newtoni opera quae extant omnia* in 5 Bdn., hrsg. von Samuel Horsley, London 1779—1785.
(5) *The mathematical papers of Isaac Newton*, hrsg. von D.T. Whiteside in 8 Bdn., I, Cambridge 1967.

Oppolzer, Theodor v.
Canon der Finsternisse, Wien 1887.

Ore, Oystein
Cardano the gambling scholar, Princeton 1953.

Oughtred, William
Clavis mathematica denuo limata, 2. Auflage, London 1648.

Pascal, Blaise
Traité du triangle arithmétique, (1654 gedruckt) veröffentlicht Paris 1665.

Pearson, Karl
(1) *Historical Note on the Origin of the Normal Curve of Errors*, Biometrika 16, 1924, S. 402—404.
(2) *James Bernoulli's Theorem*, Biometrika 17, 1925, S. 201—210.

PENNY CYCLOPAEDIA VIII, London 1837.

Prestet, Jean
Élémens des mathématiques, Paris 1675.

Roberts, Francis (= Francis Robartes nach Todhunter a.a.O., S. 54)
An arithmetical paradox, concerning the chances of lotteries, *PT* Nr. 198, 1693, S. 677—681.

Rohault, Jacques
Oeuvres mathématiques posthumes, hrsg. v. C. Clerselier, Paris 1682.

Roomen, Adriaan van
Ideae mathematicae ..., Leiden 1593.

Ruffini, Paolo
Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto, Bologna 1799.

Saunderson, Nicholas
The elements of algebra in ten books, in 2 Bdn. Cambridge 1740.

Schooten, Frans van
(1) siehe Viète.
(2) *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, Leiden 1657, darin veröffentlicht: Huygens Ch., *Tractatus, de Ratiociniis in Aleae Ludo*.
(3) *Appendix, de cubicarum aequationum resolutione*, in der *Geometria* von Descartes 1659/61.

Scriba, Christoph J.
Studien zur Mathematik des John Wallis (1616—1703), Wiesbaden 1966.

Simpson, Thomas
(1) *A treatise on the nature and laws of chance*, London 1740.
(2) *The doctrine of annuities and reversions*, London 1742.

Smith, Robert, siehe Cotes.

Steiner, Hans, siehe Freudenthal.

Stirling, James
(1) *Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730.
(2) Für den Briefwechsel Stirlings siehe Tweedie.

Strong, E.W.
Newton and God, Journal of the History of Ideas 13, 1952, S. 147—167.

Struyck, Nicolaas
Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arithmetica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest, Amsterdam 1716. Eine von J.A. Vollgraff besorgte französische Übersetzung erschien Amsterdam 1912.

Taylor, Brook
Contemplatio philosophica ... hrsg. v. William Young, London 1793.

Todhunter, Isaac
A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace, Cambridge 1865.

Tropfke, Johannes
Geschichte der Elementarmathematik,
1. Auflage in 2 Bdn., Leipzig 1902, 1903
2. Auflage in 7 Bdn., Berlin und Leipzig 1921—1924
3. Auflage (Bd. 1—4 der 2. Auflage) Berlin und Leipzig 1930—1940.

Turnbull, Herbert Westren
James Gregory tercentenary memorial volume, London 1939.
Tweedie, Charles
James Stirling a sketch of his life and works along with his scientific correspondence, Oxford 1922.
Venn, J. und J.A.
Alumni Cantabrigienses, Cambridge 1922.
Viète, François
(1) *In artem analyticen isagoge*, Tours 1591.
(2) *Supplementum geometriae*, Tours 1593.
(3) *Francisci Vietae responsum ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus*, Paris 1595.
(4) *Ad angulares sectiones ...* hrsg. von Alexander Anderson, Paris 1615.
(5) *Opera mathematica*, hrsg. von Frans van Schooten, Leiden 1646.
Vollgraff, Johann Adriaan, siehe Struyck.
Walker, Helen M.
(1) *Studies in the History of Statistical Method*, Baltimore 1929 und 1931.
(2) *Abraham de Moivre*, Scripta Mathematica 2, 1934, S. 316—333.
Wallis, John
(1) *A treatise of angular sections*, London 1684.
(2) *A treatise of algebra, both historical and practical*, London 1685.
(3) *Opera mathematica* in 3 Bdn., Oxford 1695, 1693, 1699.
Whiteside, Derek Thomas
(1) *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century*, Archive for History of Exact Sciences 1, 1961, S. 179—388.
(2) siehe Newton.
Wieleitner, Heinrich, siehe Hofmann.
Witt, Jan de
Waerdye van Lyf-renten near proportie van Los-renten, Den Haag 1671.
Wolf, Christian von
Mathematisches Lexicon, Leipzig 1716.
Wollenschläger, Karl
Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli und Abraham de Moivre, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel 43, 1933, S. 151—317.
Young, William, siehe Taylor.

Chronologisches Verzeichnis des Briefwechsels de Moivres

Bei jedem Brief steht der zugehörige Abschnitt 2.3.1., 2.3.2. oder 2.3.3., je nachdem der Brief als Entwurf oder Original noch vorhanden ist, im 18. Jh. publiziert oder aus dem Quellenmaterial erschlossen wurde. Die bereits veröffentlichten Briefe aus 2.3.1. werden durch ein zusätzliches v. gekennzeichnet. Alle weiteren Angaben wie Fund- bzw. Aufbewahrungsort, Veröffentlichungen oder Quellen für die erschlossenen Briefe sind den zugehörigen Abschnitten zu entnehmen. Soweit bekannt ist das Originaldatum angegeben und der jeweilige Stil durch (a. S.) oder (n. S.) gekennzeichnet[47].

1. de Moivre — Halley	1695	2.3.2.
2. Colson — de Moivre	15. 11. 1703 (a. S.)	2.3.2.
3. de Moivre — Johann I Bernoulli	22. 4. 1704 (a. S.)	2.3.1. v.
4. Johann I Bernoulli — de Moivre	15. 11. 1704 (n. S.)	2.3.1. v.
5. de Moivre — Johann I Bernoulli	13. 3. 1705 (a. S.)	2.3.1. v.
6. Johann I Bernoulli — de Moivre	5. 7. 1705 (n. S.)	2.3.1. v.
7. de Magneville — de Moivre,	vor dem 27. 7. 1705 (a. S.)	2.3.3.
8. de Moivre — Johann I Bernoulli	27. 7. 1705 (a. S.)	2.3.1. v.

9. DE MOIVRE — HALLEY	1705 oder später	2.3.2.
10. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	16. 2. 1706 (n. S.)	2.3.1. v.
11. DE MOIVRE — LEIBNIZ	10. 4. 1706 (a. S.)	2.3.1.
12. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	25. 4. 1706 (a. S.)	2.3.1. v.
13. DE MAGNEVILLE — DE MOIVRE	Juni 1706	2.3.3.
14. LEIBNIZ — DE MOIVRE	24. 6. 1706 (n. S.)	2.3.1.
15. DE MOIVRE — HERMANN	8. 7. 1706 (a. S.)	2.3.3.
16. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	8. 7. 1706 (a. S.)	2.3.1. v.
17. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	6. 4. 1707 (n. S.)	2.3.1. v.
18. VARIGNON — DE MOIVRE	Mai 1707	2.3.3.
19. HERMANN — DE MOIVRE	1707	2.3.3.
20. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	2. 12. 1707 (a. S.)	2.3.1. v.
21. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	6. 7. 1708 (a. S.)	2.3.1. v.
22. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	9. 4. 1710 (n. S.)	2.3.1. v.
23. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	18. 10. 1712 (a. S.)	2.3.1. v.
24. NIKOLAUS I BERNOULLI — DE MOIVRE	November 1712	2.3.1.
25. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	23. 11. 1712 (n. S.)	2.3.1. v.
26. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	17. 12. 1712 (a. S.)	2.3.1. v.
27. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	18. 2. 1713 (n. S.)	2.3.1. v.
28. NIKOLAUS I BERNOULLI — DE MOIVRE	30. 12. 1713 (n. S.)	2.3.1.
29. MONTMORT — DE MOIVRE	Februar (?) 1714	2.3.3.
30. DE MOIVRE — NIKOLAUS I BERNOULLI	3. 3. 1714 (a. S.)	2.3.1.
31. DE MOIVRE — MONTMORT	Mitte März 1714	2.3.3.
32. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	20. 3. 1714 (n. S.)	2.3.1. v.
33. DE MOIVRE — VARIGNON	März 1714	2.3.3.
34. MONTMORT — DE MOIVRE	April-Juni 1714	2.3.3.
35. DE MOIVRE — VARIGNON	Juni 1714	2.3.3.
36. DE MOIVRE — JOHANN I BERNOULLI	28. 6. 1714 (a. S.)	2.3.1. v.
37. DE MOIVRE — MONTMORT	12. 7. 1714 (a. S.)	2.3.3.
38. JOHANN I BERNOULLI — DE MOIVRE	4. 8. 1714 (n. S.)	2.3.1. v.
39. NIKOLAUS I BERNOULLI — DE MOIVRE	4. 8. 1714 (n. S.)	2.3.1.
40. DE MOIVRE — VARIGNON	2. 8. 1714 (a. S.)	2.3.3.
41. VARIGNON — DE MOIVRE,	zwischen 20. u. 25. 11. 1714 (n. S.)	2.3.3.
42. DE MOIVRE — VARIGNON	Dezember 1714/ Januar 1715	2.3.3.
43. MONTMORT — DE MOIVRE	26. 3. 1715 (n. S.)	2.3.3.
44. MONTMORT — DE MOIVRE	17. 4. 1715 (n. S.)	2.3.3.
45. MONTMORT — DE MOIVRE,	nach dem 3. 5. 1715	2.3.3.
46. MONTMORT — DE MOIVRE,	zwischen Brief 45 und dem 12. 4. 1716 (n. S.)	2.3.3.
47. DE MOIVRE — MONTMORT	1718	2.3.3.
48. DE MOIVRE — TAYLOR	mutmaßlich 1718	2.3.3.
49. TAYLOR — DE MOIVRE	mit Sicherheit	2.3.3.
50. TAYLOR — DE MOIVRE	zwischen	2.3.3.
51. DE MOIVRE — TAYLOR	1718 und	2.3.3.
52. TAYLOR — DE MOIVRE	1720	2.3.3.
53. DE MOIVRE — VARIGNON	20. 4. 1719 (a. S.)	2.3.3.
54. VARIGNON — DE MOIVRE	Juli/August 1719	2.3.3.
55. DE MOIVRE — unbek. Engländer	August 1719	2.3.3.
56. DE MOIVRE — VARIGNON	3. 10. 1719 (a. S.)	2.3.3.
57. VARIGNON — DE MOIVRE	2. 1. 1720 (n. S.)	2.3.3.
58. DE MOIVRE — unbek. Engländer	Februar 1720	2.3.3.
59. DE MOIVRE — VARIGNON	Juni 1720	2.3.3.
60. VARIGNON — DE MOIVRE	Juli 1720	2.3.3.
61. DE MOIVRE — VARIGNON	25. 7. 1720 (a. S.)	2.3.3.
62. DE MOIVRE — VARIGNON	15. 9. 1720 (a. S.)	2.3.3.

63. Varignon — de Moivre		September/Oktober (?) 1720	2.3.3.
64. de Moivre — Varignon		Oktober/November (?) 1720	2.3.3.
65. de Moivre — Varignon		Anfang Dezember 1720	2.3.3.
66. Varignon — de Moivre		Dezember 1720	2.3.3.
67. de Moivre — Varignon		5. 1. 1721 (a. S.)	2.3.3.
68. Varignon — de Moivre		März 1721	2.3.3.
69. de Moivre — Varignon		8. 5. 1721 (a. S.)	2.3.3.
70. Varignon — de Moivre		24. 7. 1721 (n. S.)	2.3.3.
71. de Moivre — Varignon		19. 8. 1721 (a. S.)	2.3.3.
72. de Moivre — Varignon		16. 9. 1721 (a. S.)	2.3.3.
73. Varignon — de Moivre		Anfang Dezember 1721	2.3.3.
74. Varignon — de Moivre		Dezember 1721	2.3.3.
75. de Moivre — Varignon		28. 12. 1721 (a. S.)	2.3.3.
76. de Moivre — Varignon		Mitte Januar 1722	2.3 3.
77. de Moivre — Varignon		25. 4. 1722 (a. S.)	2.3.3.
78. de Moivre — Varignon		17. 5. 1722 (a. S.)	2.3.3.
79. de Moivre — Machin		2. 8. 1722 (a. S.)	2.3.2.
80. Stirling — de Moivre		19. 6. 1729 (a. S.)	2.3.2.
81. Cramer — de Moivre		10 (?). 9. 1729 (n. S.)	2.3.3.
82. Stirling — de Moivre		Januar (?) 1730	2.3.3.
83. Maclaurin — de Moivre		1730 (?)	2.3.3.
84. de Moivre — Cramer		30. 4. 1731 (a. S.)	2.3.1.
85. Cramer — de Moivre		Ende 1731	2.3.3.
86. de Moivre — Naudé	vor dem	23. 8. 1735 (n. S.)	2.3.3.
87. Naudé — de Moivre	nach dem	23. 8. 1735 (n. S.)	2.3.3.
88. de Moivre — Naudé	vor dem	27. 9. 1736 (n. S.)	2.3.3.
89. de Moivre — Berliner Akademie, gleichzeitig mit Brief 88			2.3.3.
90. de Moivre — Maclaurin		Januar 1738	2.3.3.
91. de Moivre — Saunderson	vor dem	26. 9. 1738 (a. S.)	2.3.2.
92. Saunderson — de Moivre		26. 9. 1738 (a. S.)	2.3.2.
93. de Moivre — Herausgeber von Saundersons *Algebra* (Colson ?)		29. 4. 1740 (a. S.)	2.3.2.
94. de Moivre — Jones		1740	2.3.2.
95. de Moivre — Jones		1744	2.3.2.
96. de Moivre — Folkes		ohne Datum um 1740	2.3.1.
97. de Moivre — d'Ortous de Mairan		Juli (?) 1754	2.3.3.

Namenregister

Einfache Zahlen bedeuten Seitenzahlen, alle Zahlen hinter einem F. kennzeichnen Fußnoten.

Abel, Niels Henrik (1802—1829): 177, 225f., 249f., 304; F. 189, 210
Allamand, Jean Nicolas Sébastien (1713—1787): 304, 307; F. 51
Anderson, Alexander (1582—1620?): 219, 304, 311
Apollonius U. Perge (262?—190?): 305, 307; F. 119
Arbuthnot, John (1667—1735) 305; F. 381
Auchter, Heinrich: 305; F. 45

Bag, Amulya Kumar: 305; F. 240
Barrow, Isaac (1630—1677): F. 304
Bateman, Harry: 189, 305
Behnke, Heinrich: 307; F. 11

Bernoulli, Daniel (1700—1782): 185, 264—266, 305f.; F. 337, 338, 340
Bernoulli, Jakob (1655—1705): 191, 207, 213f., 232f., 252, 257, 268f., 275, 278, 281, 292f., 300, 305, 310; F. 6, 236—238, 240, 247, 277, 424, 430—432, 434—437, 441
Bernoulli, Johann I (1667—1748): 179, 182, 186—189, 191—193, 197—201, 204—208, 210—212, 215, 231—237, 239, 250, 252, 257, 264f., 278, 304—309, 311f.; F. 23, 24, 32, 33, 43, 46, 54, 78, 92, 112—117, 124—127, 149—151, 153—157, 159, 165a, 173, 183, 231, 232, 241, 244, 253, 254, 257a, 294, 387, 456
Bernoulli, Johann II (1710—1790): 188
Bernoulli, Nikolaus I (1687—1759): 184, 186—188, 191, 193—195, 209—214, 217, 259, 264—266, 277f., 281, 288, 293, 302, 305, 312; F. 32, 39, 44, 48, 49, 75—79, 88, 121, 128, 138, 149, 159, 165, 310, 313, 332, 334—336, 348, 384, 385, 387, 401, 421, 437
Bertram, Günter: 307; F. 11
Biermann, Kurt-Reinhard: 305f.; F. 170, 247, 463
Bodenheimer, Friedrich Shimon: 305; F. 328
Bombelli, Rafael (1526—1572/73): 305; F. 273
Boncompagni, Baldassarre (1821—1894): 309; F. 328
Braunmühl, Anton von (1853—1907): 179, 305f.
Briggs, Henry (1561—1630): F. 369
Buée, Adrien-Quentin (1748—1826): 230, 306; F. 221
Carcavy, Pierre de (1600?—1684): 280
Cardano, Geronimo (1501—1576): 182, 206, 219, 222, 225f., 236f., 292, 300, 306, 309; F. 429
Castillon, Giovanni Francesco Mauro Melchior Salvemini de (1708—1791): F. 54
Ceulen, Ludolph van (1540—1610): F. 190
Cheyne, George (1671—1734): 185, 187, 204f., 306; F. 34, 109—114
Christ, Franz (18. Jh.): F. 310
Clarke, Samuel (1675—1729): 309; F. 119
Clerselier, Claude (1614—1684): 310
Cole, William (1714—1782): 216; F. 179
Collins, John (1625—1683): 184, 210, 230, 306, 308; F. 148, 223, 243, 304
Colson, John (1680—1760): 189f., 215f., 311, 313; F. 57, 179
Conduitt, John (1688—1737): F. 278
Conti, Antonio Schinella (1677—1749): 199; F. 32, 91
Costabel, Pierre: F. 93
Coste, Pierre (1668—1747): 184, 306, 309; F. 167
Cotes, Roger (1682—1716): 177, 208, 214, 236, 242—244, 251, 306, 308, 310; F. 14, 131, 251, 252, 266, 269, 306
Craig, John (1665?—1731): 204
Cramer, Gabriel (1704—1752): 186, 188, 191, 213—215, 265f., 274, 288, 313; F. 41, 52, 68, 172, 173, 175, 176, 334—336, 339, 367, 421
Crusius, Jo. Henr. (= Pseudonym für Johann I Bernoulli): 210f., 305, 308; F. 151, 154
Cuming, Alexander (1690?—1775): 214, 266, 270, 293f.; F. 341, 438
Czuber, Emanuel (1851—1925): 306; F. 4, 454
David, Florence Nightingale: 179, 306; F. 9, 428, 449
Descartes, René (1596—1650): 202f., 224, 249, 306, 308, 310; F. 204, 209
Dodson, James (gest. 1757): 184, 306; F. 30
Dulaurens, François (gest. 1670): F. 208
Edleston, Joseph (19. Jh.): 306; F. 131, 133
Eggenberger, Johann: 179, 306; F. 3, 454
Eneström, Gustav (1852—1923): F. 377
Errard, Jean: (gest. um 1620): 307
Euklid v. Alexandria (365?—300?): 202
Euler, Leonhard (1707—1783): 185, 209, 218, 247, 249—251, 266, 284, 297, 305f., 308; F. 36, 37, 137, 279—281, 283, 287, 289, 340, 372, 410, 453

Faak, Margot: 305f.; F. 170
Fatio de Duillier, Nicolas (1664—1753): 192, 203, 257, 306, 309; F. 103, 307a, 307b
Fedel, Ernst Jakob: 306; F. 43
Fermat, Pierre de (1601—1665): 219, 221—224, 228, 249f., 280, 304, 307, 308; F. 201, 203, 211, 262, 289
Ferrari, Ludovico (1522—1565): 219
Ferro, Scipione dal (1465—1526): 219, 224
Fleckenstein, Joachim Otto: 304, 307; F. 124
Fleury, de (18. Jh.): 198
Folkes, Martin (1690—1754): 188f., 214, 309, 313; F. 53
Fontenelle, Bernhard le Bovier de (1657—1757): 209, 307; F. 141
Freudenthal, Hans: 179, 307, 310; F. 11, 247, 428, 446

Galois, Evariste (1811—1832): 177
Gerhardt, Carl Immanuel (1816—1899): 307, 309; F. 121, 227, 241
Gericke, Helmuth: 304
Gerson, Levi Ben (1288—1344): F. 247
Gini, Corrado: 307; F. 436
Ginzel, Friedrich Karl (1850—1926): 307; F. 47
Girard, Albert (1595—1632): 307; F. 274
Glass, David Victor: 307; F. 458
Goldbach, Christian (1690—1764): 266; F. 340
Grandjean de Fouchy, Jean Paul (1707—1788): 180f., 307; F. 15, 16, 20, 73, 74
Graunt, John (1620—1674): 300f., 307; F. 458—460
s'Gravesande, Wilhelm Jakob (1688—1742): 188, 304, 307; F. 51
Gregory, James (1638—1675): 207, 230, 249f., 300, 307, 311; F. 123, 223, 243, 304

Haag, Eugène und Emile: 180f., 307; F. 17, 21, 101
Haas, Karlheinz: 307; F. 204
Haase, Carl: 308
Halley, Edmond (1656—1742): 177, 189f., 203, 206f., 211, 213, 300—302, 307—309, 311f.; F. 14, 27, 59—61, 104, 119, 168, 306
Henrion, Denis (gest. 1640): 202, 307; F. 99
Henry, Charles: 307
Hermann, Jakob (1678—1733): 191, 210, 232, 307, 312; F. 69, 121, 152, 235, 236, 240, 241, 243
Hire (= La Hire Philippe de (1640—1718)?): 198
Hofmann, Joseph Ehrenfried: 180, 304, 308, 311; F. 13, 193, 203, 206—208, 211, 213, 214, 216, 222, 227, 237, 246, 252, 306, 340
Horsley, Samuel (1733—1806): 308f.
L'Hospital, Guillaume François Antoine Marquis de (1661—1704): 253, 257; F. 165a, 296
Hudde, Jan (1628—1704): 224, 257, 306—308; F. 204, 388
Hussey (18. Jh.): 208; F. 133
Huygens, Christiaan (1629—1695): 181, 202, 207, 222, 224, 228f., 250, 257, 276f., 280f., 301f., 308, 310; F. 22, 201, 211, 214, 388, 399, 459—462
Huygens, Lodewijk (1631—1699): 301; F. 461, 462

Johnson, Samuel (1709—1784): 309; F. 19
Jones, William (1675—1749): 183, 190, 208, 233, 245, 308, 313; F. 62, 130, 131, 242, 275, 276
Jordan, Charles Etienne (1700—1745): 303, 308; F. 472

Keill, John (1671—1721): 184, 187, 209—211, 305, 308; F. 143, 146—154
Klingenstierna, Samuel (1698—1765): 265

Lagrange, Joseph Louis (1736—1813): 249, 278
Laplace, Pierre Simon de (1749—1827): 179, 278f., 306, 310; F. 2, 3
Le Gendre, François (gest. um 1675): 308; F. 95
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716): 184, 187, 189, 192, 198, 204—207, 209f., 213, 219, 224—230, 247, 249—253, 255, 257f., 300—309, 312; F. 31, 54, 109, 114,

115, 120, 121, 124, 126, 127, 145, 146, 148, 170, 204—209, 211—217, 227, 241, 254, 257a, 294, 296, 298, 307a, 307b, 308, 463
Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (1180?—1250?): 264, 309; F. 328, 329
Ludwig XIV. (1643—1715): 203, 211
Machin, John (1680—1751): 190, 211, 233—236, 239, 250, 258, 313; F. 63, 241—244
MacLaurin, Colin (1698—1746): 191f., 297, 309, 313; F. 70, 71, 183, 188, 453
Mac Pike, Eugene Fairfield: 309; F. 61
Maddison, Robert Edwin Witton: 309; F. 53
Magneville oder Manneville de (18. Jh.): 192, 203, 206, 236, 311f.
Mairan, Jean Jacques d'Ortous de (1678—1771): 192, 313; F. 74
Maseres, Francis (1731—1824): 309; F. 60
Mathy, Paul (geb. 1681): 181
Maty, Matthew oder Matthieu (1718—1776): 180f., 189, 192, 195f., 201f., 208, 213, 217f., 287, 304, 309; F. 18—21, 27, 186, 187
Maty, Paul Henry (1745—1787): 309; F. 27
Maurolico, Francesco (1494—1575): F. 247
Mencke, Johann Burkhard (1674—1732): F. 173
Mercator, Nikolaus (1620—1687): 207, 308f.; F. 14, 240, 246, 304
Moivre, Abraham de (1667—1754): Werke 182—185, durchgehend
Molière = Poquelin, Jean Baptiste (1622—1673): 217
Montmort, Pierre Rémond de (1678—1719): 186, 188, 192—195, 207—209, 211, 213, 216f., 259f., 264f., 277—279, 281, 307, 309, 312; F. 32, 40, 44, 49, 50, 75, 76, 79, 80, 138—142, 313, 330, 332, 333, 382, 385, 387, 388, 400, 401
Moray, Robert (1610?—1673): 301; F. 459, 460
Morgan, Augustus de (1806—1871): 309; F. 19
Müller, Kurt: 309; F. 31
Naudé, Philipp (1684—1747): 195f., 313; F. 87
Neumann, Caspar (1648—1715): 213
Newton, Isaac (1643—1727): 177, 184, 187, 189, 194, 198—206, 208—213, 218, 229f., 241, 243, 247, 249f., 252, 255, 257f., 287, 300, 305f., 308—311; F. 25, 33, 105, 110, 119, 122, 132, 145—151, 154, 167, 188, 216, 222, 226—230, 238, 240, 278, 293, 304, 419
Nilakaṇṭha, Somasutvan (1465—1545): F. 240
Oldenburg, Heinrich (1618?—1677): 229f., 247, 250; F. 213, 216, 227, 229, 238
Oppolzer, Theodor von (1841—1886): 309; F. 82
Ore, Oystein (1899—1968): 309; F. 429
Oughtred, William (1574—1660): 229, 232, 250, 310; F. 291
Ozanam, Jacques (1640—1717): 202
Pascal, Blaise (1623—1662): 280, 310; F. 2, 247, 399
Pearson, Karl: 179, 292, 310; F. 5, 6, 377, 434, 449
Pemberton, Henry (1694—1771): 214; F. 172, 173
Petty, William (1632—1687): 300; F. 458
Prestet, Jean (1652—1690): 202, 310; F. 98
Roannez, Duc de = Gouffier, Artus (gest. 1696): 301, 308; F. 463
Roberts oder Robartes, später Earl of Radnor, Francis (1650?—1718): 208f., 277, 310; F. 379
Rohault, Jacques (1620—1675): 202, 310; F. 100
Roomen, Adriaan van (1561—1615): 219, 221f., 249, 310f.; F. 190, 194, 200, 202
Ruffini, Paolo (1765—1822): 310; F. 189
Sauer, Robert: 307; F. 11
Saunderson, Nicholas (1682—1739): 183, 190, 208, 215, 244f., 310, 313; F. 28, 29, 64—67, 132, 133, 172, 276
Schooten, Frans van (1615—1660): 181, 224, 306, 308, 310f.; F. 22, 192, 202, 204, 209, 388
Schröder, Kurt: 308
Scriba, Christoph J.: 310; F. 199, 200, 219, 291
Sherwin, Henry (um 1700): F. 59

Simpson, Thomas (1710—1761): 216, 310; F. 180, 181
Smith, Robert (1689—1768): 306, 310; F. 251
Speziali, Pierre: F. 52
Spon, Charles (1609—1684): 306
Steiner, Hans Georg: 179, 307, 310; F. 11
Stevin, Simon (1548—1620): F. 209
Stifel, Michael (1487?—1567): F. 275
Stirling, James (1692—1770): 177, 185f., 190—192, 196, 214f., 252, 266f., 270—276, 294, 296, 310f., 313; F. 38, 39, 68, 70, 71, 174, 283, 339, 345, 352—367, 369, 377
Straub, Hans: 304
Strong, E. W.: 310; F. 188
Struyck, Nicolaas (1687—1769): 278, 281, 310f.; F. 386—388
Tannery, Paul (1843—1904): 307
Tartaglia, Niccolò (1500?—1557): 219
Taylor, Brook (1685—1731): 186, 189, 194—197, 199, 207, 210, 305, 307, 310—312; F. 45, 55, 124
Teignmouth, John Baron (1751—1834): F. 131
Thurneisen, Gebr. (18 Jh.): 305; F. 128
Todhunter, Isaac (1820—1884): 179, 305, 310; F. 2, 379, 381, 388
Totok, Wilhelm: 308
Tropfke, Johannes (1866—1939): 310; F. 269, 274
Turnbull, Herbert Westren (1885—1961): 307, 311; F. 123, 223, 225, 304
Tweedie, Charles (1868—1925): 310f.; F. 38, 39, 68, 70, 71, 175, 339, 367, 377
Varignon, Pierre de (1654—1722): 184, 186, 188, 197—201, 204, 211f., 304, 306, 312f.; F. 33, 42, 43, 92, 93, 155, 156
Venn, John (1834—1923): 311; F. 178
Viète, François (1540—1603): 177, 218—224, 230f., 233, 249f., 304, 310f.; F. 190—202, 226, 233, 239, 245, 255, 274, 291
Vollgraff, Johann Adriaan (1877—1965): 310f.; F. 386
Waerden, Bartel Leendert van der: 304; F. 431
Walker, Helen M.: 179, 311; F. 7, 8, 20, 187
Wallis, John (1616—1703): 215, 229, 232, 244f., 250, 273, 310f.; F. 219, 220, 229, 291
Whiston, William (1667—1752): 208
Whiteside, Derek Thomas: 309, 311; F. 237, 278
Wieleitner, Heinrich (1874—1931): 180, 308, 311; F. 13
Witt, Jan de (1625—1672): 213, 300, 305, 311; F. 170, 171, 388
Wolf, Christian von (1679—1754): 180, 311; F. 255
Wollenschläger, Karl: 179, 311; F. 10, 20, 23, 24, 46, 112, 113, 116, 117, 244, 456
Young, William (18. Jh.): 310f.; F. 45

Institut für Geschichte der Naturwissenschaften
Universität München
8 München 26
Deutsches Museum

(Eingegangen am 14. Juni 1968)

Universitätsdruckerei H. Stürtz AG Würzburg
Printed in Germany

Lebenslauf

Am 1. September 1938 kam ich als Sohn des Diplomkaufmanns Hans Schneider und seiner Ehefrau Margarete, geborene Tyroller, in München zur Welt.

Nach vier Jahren Volksschule besuchte ich von 1948 bis 1957 das Maximilians-Gymnasium in München. Vom Wintersemester 1957/58 an studierte ich Mathematik und Physik an der Universität München. 1963 bestand ich die Diplomprüfung für Mathematiker naturwissenschaftlicher Richtung.

Während meines Studiums war ich zwei Semester als Hilfsassistent am Mathematischen Institut tätig. Seit November 1963 verwalte ich eine wissenschaftliche Assistentenstelle am Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München.

Ivo Schneider